

第2章 PID 制御系の性能評価

最小分散制御に基づく制御性能評価手法の PID 制御系への適用についての解説

執筆者

丸田 浩 京都大学 大学院工学研究科化学工学専攻

加納 学 京都大学 大学院工学研究科化学工学専攻

2. PID 制御系の性能評価

京都大学 丸田 浩, 加納 学

これまでに, PID 制御系の性能評価手法として Grimble が制御偏差を積分した信号の分散の最小値を基準とした手法を提案している [1]. この手法は PID 制御など, コントローラのクラスを限定した場合を考慮する手法であり, PID 制御の性能評価を与える数少ない手法の一つである. ところがコントローラのクラスを限定した場合については, プラントモデルの情報が必要となる. プラントモデルの情報を与えられているなら, 評価のためだけにモデルを使うよりもモデルを基に制御系設計を行った方が得策である.

一方, 最小分散制御 (MVC) に基づく制御性能評価手法 [2] は通常のプロント運転データとプラントのむだ時間の情報だけで制御性能 (制御偏差の分散は MVC を行った場合に比べてどの程度大きいのか) を評価できる一方, MVC を実現するためのコントローラは PID 制御では実現できない場合もある.

PID 制御系に対し, MVC を基準とした制御性能評価手法を適用した結果, 制御性能が悪いと判定された場合, PID 制御によって達成できる制御性能の限界が決定されれば, 次のような判断ができる.

- 現在の制御性能が PID 制御で達成できる制御性能の限界から程遠い場合, PID 制御のチューニングパラメータを変更することで制御性能の向上が期待できる
- 現在の制御性能が PID 制御で達成できる制御性能の限界に近い場合, PID 制御では制御性能の向上は期待できないので, モデル予測制御などより高度な制御構造を考えた方がよい

そこで本研究では, PID 制御系に対し, MVC を基準とした制御性能評価手法を適用した場合の性能限界について考察を行った. 対象とする制御系は図 1 に示す SISO 制御系である.

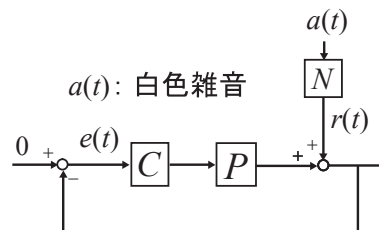


図 1: 対象とする SISO 制御系

2.1. 連続時間系の最小分散制御

MVC を基準とした制御性能評価手法で得られる情報は, 白色雑音 $a(t)$ から制御偏差 $e(t)$ への閉ループ伝達関数 $H_{ea}(z^{-1})$ だけであるため, 外部信号の動特性とプロセス動特性を区別できない. したがって, プロセス動特性モデルの情報がない限り $C_{MV}(z^{-1})$ を推定することは不可能であり, 制御偏差の分散を最小とする PID コントローラ的设计は困難であると考えた. そこで, 本章ではプロセスモデルが存在するという仮定を置く. 実際のプロセスは複雑な動特性を有するが, プロセス動特性を 1 次遅れとむだ時間で近似したモデルで表現することが多い. そこで, プロセス動特性モデルは次遅れとむだ時間で表現できると仮定する. プロセスモデルの存在を仮定しているが, プロセスのむだ時間以外の情報を使わずに導出できる制御性能評価指標を用いればよい.

MVC を基準とした制御性能評価手法で得られる閉ループ伝達関数 $H_{ea}(z^{-1})$ の情報とプロセスのむだ時間の情報を使うことで, 最小分散制御を行ったときの閉ループ伝達関数 $H_{MV}(z^{-1})$ が得られる. したがって, 分

散を最小とするようなPIDチューニングを求めるとするには $H_{ea}(z^{-1})$ を $H_{MV}(z^{-1})$ に「近似する」ようなPIDチューニングを考えればよいと考えられる．しかし，離散時間系においてはどのような近似を用いればよいかわからない．

そこで，閉ループ伝達関数 H_{ea} の逆数を所定の関数に合わせる北森の部分的モデルマッチング法に着目した．しかし，この手法は連続時間系の制御系設計に用いられる手法である．最小分散制御に基づいた制御性能評価手法は離散時間系で用いられる手法であるから，そのまま部分的モデルマッチング法を適用することはできない．そこで，離散時間系で定義された最小分散制御の考え方を応用して，連続時間系の最小分散制御を定義する．

むだ時間が L であるプロセス動特性の伝達関数 $P(s)$ を

$$P(s) = e^{-Ls} \tilde{P}(s) \quad (1)$$

のようにむだ時間要素とむだ時間を含まない遅れ要素に分ける．ここで，外部信号の動特性 $N(s)$ のインパルス応答 $n(t)$ を

$$n(t) = v(t) + w(t - L) \quad (2)$$

の形に分割することを考える．ただし， $v(t)$ ， $w(t - L)$ は

$$v(t) = \begin{cases} n(t) & (0 \leq t < L) \\ 0 & (t \geq L) \end{cases} \quad (3)$$

$$w(t - L) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < L) \\ n(t) & (t \geq L) \end{cases} \quad (4)$$

を満たすものとする．この操作は外乱の動特性をむだ時間の前後で分割する操作である．この操作により，インパルス応答 $v(t)$ を実現する伝達関数 $V(s)$ とインパルス応答 $w(t - L)$ を実現する伝達関数 $e^{-Ls}W(s)$ を用いて

$$N(s) = V(s) + e^{-Ls}W(s) \quad (5)$$

と変形する．このように $N(s)$ を $V(s)$ と $W(s)$ に分解できた場合，白色雑音 a_t から制御偏差 $e(t)$ への閉ループ伝達関数 $H_{ea}(s)$ は

$$\begin{aligned} H_{ea}(s) &= \frac{N(s)}{1 + P(s)C(s)} \\ &= \frac{V(s) + e^{-Ls}W(s)}{1 + e^{-Ls}\tilde{P}(s)C(s)} \\ &= V(s) + e^{-Ls} \frac{W(s) - V(s)\tilde{P}(s)C(s)}{1 + e^{-Ls}\tilde{P}(s)C(s)} \\ &= V(s) + e^{-Ls}W'(s) \end{aligned} \quad (6)$$

となる． $V(s)$ はコントローラの動特性を含まないので，コントローラの種類やチューニングを変更しても $V(s)$ は不変である．一方， $W'(s)$ はコントローラの動特性を含み，コントローラの種類やチューニングを変更することで $W'(s)$ は変化する． $e^{-Ls}W'(s)$ のインパルス応答 $w'(t - L)$ は $0 \leq t < L$ では 0 である．

ここで，制御偏差 $e(t)$ の分散 σ_e^2 を求める際，伝達関数の H_2 ノルムを使うので，定義を簡単に説明し，使用する等式を列挙する．伝達関数 $H(s)$ の H_2 ノルム $\|H(s)\|$ は， $H(s)$ のインパルス応答を $h(t)$ とした場合，(7) 式で定義される．

$$\|H(s)\|^2 = \int_0^{\infty} \{h(t)\}^2 dt \quad (7)$$

なお、他に $\|H(s)\|^2$ を計算する手段として、Parseval の定理がある。Parseval の定理は (8) 式で表される。

$$\|H(s)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)H(-j\omega)d\omega \quad (8)$$

再び元の話に戻って、 $e(t)$ の分散 σ_e^2 を考える。 $e(t)$ は

$$e(t) = H_{ea} a(t) \quad (9)$$

であるが、 H_2 ノルムの性質から σ_e^2 は、白色雑音 $a(t)$ の分散 σ_a^2 と $\|H_{ea}(s)\|$ を用いて

$$\sigma_e^2 = \|H_{ea}(s)\|^2 \sigma_a^2 \quad (10)$$

で表される。したがって、 $\|H_{ea}(s)\|$ を最小とするようにコントローラ $C(s)$ を設計すれば、最小分散を実現できる。

ここで、 $H_{ea}(s)$ のインパルス応答を

$$h_{ea}(t) = v(t) + w'(t - L) \quad (11)$$

とすると、 $\|H_{ea}(s)\|^2$ は、(7) 式から

$$\begin{aligned} \|H_{ea}(s)\|^2 &= \int_0^{\infty} \{h_{ea}(t)\}^2 dt \\ &= \int_0^{\infty} \{v(t) + w'(t - L)\}^2 dt \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ [v(t)]^2 + 2v(t)w'(t - L) + [w'(t - L)]^2 \right\} dt \\ &= \int_0^L [v(t)]^2 dt + \int_L^{\infty} [w'(t - L)]^2 dt \end{aligned} \quad (12)$$

となる。先述の通り、コントローラの種類やチューニングを変更すると $w'(t - L)$ だけが変化するから、 $t \geq L$ において $w'(t - L) = 0$ のとき、 $\|H_{ea}(s)\|^2$ は最小となる。したがって、(6) 式の $W'(s) = 0$ 、すなわち $W(s) - V(s)\tilde{P}(s)C(s) = 0$ のとき、 $\|H_{ea}(s)\|^2$ は最小となるから、 σ_e^2 は最小となる。

よって、最小分散制御を実現するコントローラ $C_{MV}(s)$ は (13) 式で表される。

$$C_{MV}(s) = \frac{W(s)}{V(s)\tilde{P}(s)} \quad (13)$$

これは離散時間系の最小分散制御と全く同様の結果である。

$N(s)$ が積分器や1次遅れなどの場合には容易に $V(s)$ や $W(s)$ を計算できるが、高次遅れの場合には $V(s)$ や $W(s)$ の計算は非常に煩雑になる。ここでは、 $N(s)$ が積分器の場合と1次遅れ要素の場合について $V(s)$ と $W(s)$ を計算する。

2.1.1. $N(s)$ が積分器の場合の $V(s)$ と $W(s)$

$N(s)$ が積分器

$$N(s) = \frac{1}{s} \quad (14)$$

の場合、例えばステップ状設定値変更の場合の $V(s)$ と $W(s)$ を計算する。 $N(s)$ のインパルス応答 $n(t)$ は

$$n(t) = 1 \quad (15)$$

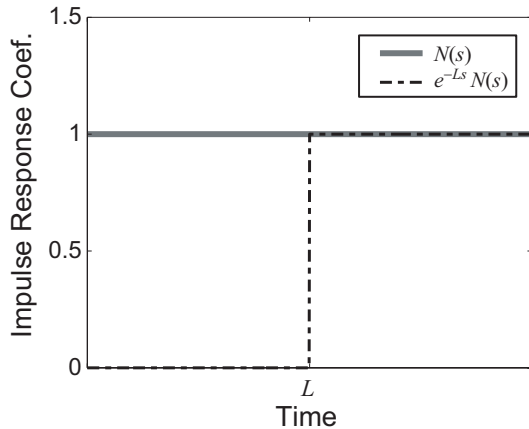


図 2: $N(s)$, $e^{-Ls}N(s)$ のインパルス応答 (積分器)

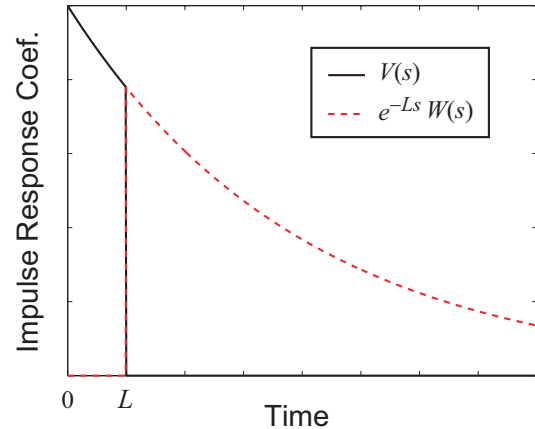


図 3: $N(s)$, $e^{-Ls}N(s)$ のインパルス応答 (1次遅れ)

である．ここで， $N(s)$ と $e^{-Ls}N(s)$ のインパルス応答を図 2 に示す．図中の $e^{-Ls}N(s)$ はむだ時間以降の $n(t)$ そのものであるから，これが $w(t-L)$ である．したがって， $e^{-Ls}W(s) = e^{-Ls}N(s)$ である．また，(5) 式から $V(s)$ も計算できる．以上の結果，

$$V(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-Ls}) \quad (16)$$

$$W(s) = \frac{1}{s} \quad (17)$$

となる．ここで，最小分散制御を行う場合の閉ループ伝達関数 $H_{MV}(s)$ について， $\|H_{MV}(s)\|^2$ は， $H_{MV}(s) = V(s)$ より，

$$\begin{aligned} \|H_{MV}(s)\|^2 &= \|V(s)\|^2 \\ &= \int_0^\infty \{v(t)\}^2 dt \\ &= \int_0^L 1^2 dt \\ &= L \end{aligned} \quad (18)$$

となり，むだ時間 L に一致することがわかる．

2.1.2. $N(s)$ が 1 次遅れ要素の場合の $V(s)$ と $W(s)$

外部信号の動特性 $N(s)$ が 1 次遅れ

$$N(s) = \frac{1}{T_F s + 1} \quad (19)$$

であるものとする．はじめに， $W(s)$ を導出する． $N(s)$ のインパルス応答 $n(t)$ は $N(s)$ のラプラス逆変換に等しく

$$n(t) = \frac{1}{T_F} e^{-\frac{t}{T_F}} \quad (20)$$

である．ここで， $e^{-Ls}W(s)$ のインパルス応答 $w(t-L)$ は $t \geq L$ では $n(t)$ に等しいので，

$$\begin{aligned} w(t-L) &= \frac{1}{T_F} e^{-\frac{t}{T_F}} \\ &= \frac{1}{T_F} e^{-\frac{t-L}{T_F}} e^{-\frac{L}{T_F}} \\ &= \frac{a}{T_F} e^{-\frac{t-L}{T_F}} \end{aligned} \quad (21)$$

となる．ただし， $a = e^{-\frac{L}{T_F}}$ である． $(t-L)$ を改めて t とし， $t \geq 0$ の範囲を想定して Laplace 変換を行うと， $W(s)$ は

$$W(s) = \frac{a}{T_F s + 1} \quad (22)$$

で表される．

一方， $V(s)$ は $N(s)$ と $W(s)$ から次のようにして計算される．

$$\begin{aligned} V(s) &= N(s) - e^{-Ls} W(s) \\ &= \frac{1 - ae^{-Ls}}{T_F s + 1} \end{aligned} \quad (23)$$

最小分散制御を行う場合の閉ループ伝達関数 $H_{MV}(s)$ について， $\|H_{MV}(s)\|^2$ は， $H_{MV}(s) = V(s)$ より，

$$\begin{aligned} \|H_{MV}(s)\|^2 &= \|V(s)\|^2 \\ &= \int_0^\infty \{v(t)\}^2 dt \\ &= \int_0^L \left\{ \frac{1}{T_F} e^{-\frac{t}{T_F}} \right\}^2 dt \\ &= \left[-\frac{1}{2T_F} e^{-\frac{2t}{T_F}} \right]_0^L \\ &= \frac{1}{2T_F} \left(1 - e^{-\frac{2L}{T_F}} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

となる．

2.2. 部分的モデルマッチング法によるPIDチューニングの計算

北森の部分的モデルマッチング法は，プラントモデル $P(s)$ を既知とした場合に閉ループ伝達関数の極配置を行い，閉ループ伝達関数の逆数が二項係数標準形や Butterworth 標準形などの低周波域で安定な標準形に近づくようなPIDチューニングを与える手法である．表1に二項係数標準形を，表2にButterworth標準形を示す．なお， $\omega_0 > 0$ は速応性のチューニングを行うパラメータであり，小さいほど即応性は高くなる．

ただし本研究では，上記の標準形ではなく，最小分散制御を行ったときの閉ループ伝達関数の逆数に近づくことを試みた．

2.2.1. $N(s)$ が積分器の場合

外部信号の動特性 $N(s)$ が積分器である場合（例えばステップ状設定値変更など），最小分散コントローラを用いたときの閉ループ伝達特性 $H_{MV}(s)$ は $V(s)$ と一致するから， $H_{MV}(s)$ の逆数は(18)式の結果から

$$\frac{1}{H_{MV}(s)} = \frac{1}{V(s)} = \frac{s}{1 - e^{-Ls}} \quad (25)$$

で表される．一方，プロセス $P(s)$ を

$$P(s) = \tilde{P}(s) e^{-Ls} = \frac{K}{1+Ts} e^{-Ls} \quad (26)$$

とし，PID コントローラを用いたときの閉ループ伝達特性

$$\frac{1}{H_{ea}(s)} = \frac{1+PC}{\frac{1}{s}} = s \left\{ 1 + e^{-Ls} \frac{K_P K}{1+Ts} \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \right\} \quad (27)$$

を $\frac{1}{H_{MV}}$ と比較することを考える．

(25) 式の右辺と (27) 式の右辺のそれぞれについて $s = 0$ の周りでの Taylor 展開を行い， s に関して低次の項で係数が合致するようにコントローラのチューニングを決定する．

$H_{MV}(s)$ の Taylor 展開を行う際， $s = 0$ における微係数は分子，分母とも 0 で不定となるため，極限を使用する．このとき，(25) 式の右辺を Taylor 展開すると

$$\frac{1}{H_{MV}(s)} = \frac{1}{L} + \frac{1}{2} \cdot s + \frac{L}{12} \cdot s^2 + \dots \quad (28)$$

となる．一方，(27) 式の右辺を Taylor 展開すると

$$\frac{1}{H_{ea}(s)} = \frac{K_P K}{T_I} + \left(1 + K_P K \frac{T_I - L - T}{T_I} \right) s + K_P K \left\{ (T_D - L) + \frac{L^2}{2T_I} + \frac{T}{T_I} (L + T - T_I) \right\} s^2 + \dots \quad (29)$$

となる．ここで，上記の 2 つの式の係数を比較すると，

$$\frac{1}{L} = \frac{K_P K}{T_I} \quad (30)$$

$$\frac{1}{2} = 1 + K_P K \frac{T_I - L - T}{T_I} \quad (31)$$

$$\frac{L}{12} = K_P K \left\{ T_D - L + \frac{L^2}{2T_I} + \frac{T}{T_I} (L + T - T_I) \right\} \quad (32)$$

となる．チューニングパラメータ K_P ， T_I ，および T_D に関してこの連立方程式を解くと

$$K_P = \frac{T}{KL} \left(1 + \frac{L}{2T} \right) \quad (33)$$

$$T_I = T + \frac{L}{2} \quad (34)$$

$$T_D = \frac{6T + L}{12T + 6L} L \quad (35)$$

となる．

表 1: 二項係数標準形

次数	
1	$s + \omega_0$
2	$s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2$
3	$s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s + \omega_0^3$
4	$s^4 + 4\omega_0 s^3 + 6\omega_0^2 s^2 + 4\omega_0^3 s + \omega_0^4$

表 2: Butterworth 標準形

次数	
1	$s + \omega_0$
2	$s^2 + 1.4\omega_0 s + \omega_0^2$
3	$s^3 + 2.0\omega_0 s^2 + 2.0\omega_0^2 s + \omega_0^3$
4	$s^4 + 2.6\omega_0 s^3 + 3.4\omega_0^2 s^2 + 2.6\omega_0^3 s + \omega_0^4$

2.2.2. $N(s)$ が 1 次遅れの場合

$N(s)$ が 1 次遅れの場合について同様の議論を行う。

$H_{MV}(s)$ の逆数は $V(s)$ の逆数に等しいので (24) の結果から

$$\frac{1}{H_{MV}(s)} = \frac{T_F s + 1}{1 - a e^{-Ls}} \quad (36)$$

となる。ただし、 $a = e^{-\frac{L}{T_F}}$ とする。一方、コントローラ $C(s)$ 、プロセス $P(s)$ を

$$P(s) = \frac{K}{T s + 1} e^{-Ls} \quad (37)$$

$$C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (38)$$

とした場合の閉ループ伝達特性 $H_{ea}(s)$ の逆数は

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_{ea}(s)} &= \frac{1 + P(s)C(s)}{N(s)} \\ &= (T_F s + 1) \left\{ 1 + e^{-Ls} \frac{K K_P}{T s + 1} \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

となる。(39) 式を見ると s^{-1} の項が含まれているため、 s^{-1} の項にかかる積分時間が無限大でない限り、すなわち積分動作は行わないものとしないう限り (39) 式の Taylor 展開は不可能である。そこで、積分時間 T_I は無限大とする。

ここで、(36) 式の右边を $s = 0$ の周りで Taylor 展開すると次式が得られる。

$$\frac{1}{H_{MV}} = \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-a} \left(T_F - \frac{aL}{1-a} \right) s + \frac{1}{(1-a)^2} \left\{ \frac{1+a}{2(1-a)} L - T_F \right\} s^2 + \dots \quad (40)$$

一方、(39) 式の右边を $s = 0$ の周りで Taylor 展開すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_{ea}} &= 1 + K K_P + \{ T_F + K K_P (T_F + T_D - L - T) \} s \\ &\quad + K K_P \left\{ (T + L - T_F)(T - T_D) - T_F L + \frac{L^2}{2} \right\} s^2 + \dots \end{aligned} \quad (41)$$

s について 0 次の係数と 1 次の係数が等しいとすると

$$\frac{1}{1-a} = 1 + K K_P \quad (42)$$

$$\frac{1}{1-a} \left(T_F - \frac{aL}{1-a} \right) = T_F + K K_P (T_F + T_D - L - T) \quad (43)$$

の 2 つの連立方程式が得られ、これを解くと

$$K_P = \frac{a}{K(1-a)} \quad (44)$$

$$T_D = T - \frac{a}{1-a} L \quad (45)$$

が得られる。このとき、 a とむだ時間 L 、時定数 T の設定次第で微分時間が負になる可能性が十分に考えられる。また、この調整則に基づいた PD コントローラを用いた場合の閉ループ伝達特性を計算すると、複素数平面上の右半面に極が存在し制御系全体として不安定になるという結果が得られた。

部分的モデルマッチング法では $s = 0$ の近辺での Taylor 展開を行うが、 $s = 0$ での近似を行うということは、定常状態での閉ループ伝達特性を最小分散制御の伝達特性に合わせようとすることになる。その一方で、1次遅れのインパルス応答係数はすばやく0に収束するため、高周波領域の伝達特性に大きく依存することになる。したがって、1次遅れフィルタの場合に部分的モデルマッチング法を適用することには無理があると考えられる。

2.2.3. プロセス入力側にステップ状外乱が混入した場合

この場合、外部信号の動特性 $N(s)$ はプロセスむだ時間を除いた項 $\tilde{P}(s)$ のステップ応答に相当する。したがって、

$$N(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)} \quad (46)$$

とおけばよい。このときの $W(s)$ および $V(s)$ は前節と同様の手順に従えば次のようになる。

$$V(s) = K \frac{1 - e^{-Ls}(aTs + 1)}{s(Ts + 1)} \quad (47)$$

$$W(s) = K \frac{aTs + 1}{s(Ts + 1)} \quad (48)$$

ただし、

$$a = 1 - e^{-\frac{L}{T}} \quad (49)$$

である。 $H_{MV}(s) = V(s)$ であるから、 $H_{MV}(s)$ の逆数を $s = 0$ の周りで Taylor 展開すると

$$\frac{K}{H_{MV}(s)} = \frac{K}{V(s)} = \frac{1}{aT + L} + \frac{aTL + \frac{1}{2}L^2}{(aT + L)^2} s + \frac{L^2}{2} \frac{[(aT)^2 + \frac{2}{3}aTL + \frac{1}{6}L^2]}{(aT + L)^3} s^2 + \dots \quad (50)$$

となる。一方、 $H_{ea}(s)$ の逆数を $s = 0$ の周りで Taylor 展開すると

$$\frac{K}{H_{ea}(s)} = \frac{KK_P}{T_I} + \left\{ 1 + KK_P \left(1 - \frac{L}{T_I} \right) \right\} s + \left\{ T + KK_P \left(T_D - L + \frac{L^2}{2T_I} \right) \right\} s^2 + \dots \quad (51)$$

となる。係数を比較すると

$$\frac{1}{aT + L} = \frac{KK_P}{T_I} \quad (52)$$

$$\frac{aTL + \frac{1}{2}L^2}{(aT + L)^2} = 1 + KK_P \left(1 - \frac{L}{T_I} \right) \quad (53)$$

$$\frac{L^2}{2} \frac{[(aT)^2 + \frac{2}{3}aTL + \frac{1}{6}L^2]}{(aT + L)^3} = T + KK_P \left(T_D - L + \frac{L^2}{2T_I} \right) \quad (54)$$

であり、 K_P 、 T_I 、 T_D に関して連立方程式を解くと

$$K_P = \frac{L^2 - 2a^2T^2}{2K(aT + L)^2} \quad (55)$$

$$T_I = \frac{L^2 - 2a^2T^2}{2(aT + L)} \quad (56)$$

$$T_D = L + \frac{L^2(a^2T^2 + \frac{2}{3}aTL + \frac{1}{6}L^2) - (aT^2 + TL + L^2)(aT + L)^2}{(L^2 - 2a^2T^2)(aT + L)} \quad (57)$$

となるが、非常に複雑であり議論は困難であると考えた。

2.3. チューニングパラメータの最適化

2.2. 節の結果より，部分的モデルマッチング法を用いて最小分散を実現する PID コントローラを設計することは困難であるという結果が得られた．

そこで最適化手法を用いて， $a(t)$ から $e(t)$ への閉ループ伝達関数 H_{ea} の H_2 ノルム $\|H_{ea}\|$ を最小とする PID チューニングを求めることを試みた．ただし， $\|H_{ea}\|$ を最小とする PID チューニングは外部信号の動特性 $N(s)$ に大きく依存する．したがって，ここでは連続時間系の制御系設計でよく用いられる外部信号である大きさ 1 のステップ状設定値変更と大きさ 1 のプロセス入力側ステップ状外乱に限定した．このとき， $r(t)$ の Laplace 変換 $\mathcal{L}\{r(t)\}$ は，

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{1}{s} \quad [\text{ステップ状設定値変更}] \quad (58)$$

$$= \frac{K}{s(1+Ts)} \quad [\text{ステップ状外乱}] \quad (59)$$

である．このとき，制御偏差 $e(t)$ の Laplace 変換 $\mathcal{L}\{e(t)\}$ は

$$\mathcal{L}\{e(t)\} = H_{er}(s)\mathcal{L}\{r(t)\} \quad (60)$$

である．

制御偏差の Laplace 変換 $\mathcal{L}\{e(t)\}$ の H_2 ノルム

連続時間系での制御系設計では，通常白色雑音 $a(t)$ を仮定することはなく，外部信号 $r(t)$ を与えることが多い．このため，本節では白色雑音 $a(t)$ から制御偏差 $e(t)$ への閉ループ伝達関数ではなく，外部信号 $r(t)$ から $e(t)$ への閉ループ伝達関数で考えていく．

ここで， $e(t)$ の Laplace 変換 $\mathcal{L}\{e(t)\}$ の H_2 ノルム $\|\mathcal{L}\{e(t)\}\|^2$ は二乗積分誤差 (ISE) になることを示す． $e(t)$ はラプラス逆変換を用いて

$$e(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_{er}(s)\mathcal{L}\{r(t)\}\} \quad (61)$$

で表される．一方， $H_{er}(s)\mathcal{L}\{r(t)\}$ のインパルス応答を $h_e(t)$ とすると

$$h_e(t) = \mathcal{L}^{-1}\{1 \cdot H_{er}(s)\mathcal{L}\{r(t)\}\} = \mathcal{L}^{-1}\{H_{er}(s)\mathcal{L}\{r(t)\}\} = e(t) \quad (62)$$

である．したがって， $\|\mathcal{L}\{e(t)\}\|^2$ について

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}\{e(t)\}\|^2 &= \|H_{er}(s)\mathcal{L}\{r(t)\}\|^2 \\ &= \int_0^\infty h_e(t)^2 dt \\ &= \int_0^\infty e(t)^2 dt \quad [\because (62) \text{ 式より}] \\ &= \text{ISE} \end{aligned} \quad (63)$$

が成り立ち， $\|\mathcal{L}\{e(t)\}\|^2$ は ISE に一致する．以上のことから，連続時間系の最小分散制御は ISE を最小化する制御である．

2.3.1. 外部信号がステップ状設定値変更の場合

ステップ状設定値変更の場合， $\mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{1}{s}$ である．最小分散制御を行った場合の ISE を ISE_{MV} とすると，

$$\text{ISE}_{MV} = \int_0^L 1^2 dt = L \quad (64)$$

である．連続時間系における最小分散制御は，ISE を最小とする制御であるから， $\|\mathcal{L}\{e(t)\}\| = \left\| \frac{1}{s} H_{er}(s) \right\|$ を最小とすることを考えれば良い．

ところで，プロセスの動特性を特徴づけるパラメータは定常ゲイン K ，時定数 T およびむだ時間 L の3つである．閉ループ伝達関数 $H_{er}(s)$ の中で，定常ゲイン K は比例ゲイン K_P と必ず対になって表れるため，定常ゲインの影響は比例ゲインによって必ず打ち消すことができる．したがって，定常ゲイン K は制御性能の限界に全く影響を与えないから，制御性能の限界を評価する場合は時定数とむだ時間の影響だけを考えればよい．プロセス動特性のうち，むだ時間 L を 0.1 分から 10 分の範囲で，むだ時間を時定数で割った $\frac{L}{T}$ を 0.1 から 0.9 の範囲で変えながら，ISE を最小とするような PID パラメータを最適化手法を用いて探索した．ただ今回の最適化においては，プロセス $P(s)$ の定常ゲイン K は 1 とし，むだ時間に関しては 5 次の Pade 近似を用いている．

最適化によって得られた PID チューニングを図 4 に示す．この結果から，比例ゲインは $\frac{L}{T}$ のみに依存し，積分時間は $\frac{L}{T}$ と L に依存し，むだ時間は概ね L に強く依存することがわかる．また，むだ時間に対して ISE をプロットした結果を図 5 に，Harris Index をプロットした結果を図 6 に示す．なお，評価基準が制御量の分散から ISE に変わっているため，連続時間系の Harris Index， η を次式で定義する．

$$\eta = \frac{\text{ISE}_{MV}}{\text{ISE}} \quad (65)$$

図 5 から，PID 制御で実現可能な制御性能は定常ゲインと時定数にほとんど依存せず，むだ時間にほぼ比例することがわかる．また，Harris Index の限界はおよそ 0.92 程度になるという結果が得られた．

以上の結果，ステップ状設定値変更の場合では，ISE はプロセスの定常ゲインと時定数の影響をほとんど受けず，むだ時間にほぼ比例していることがわかり，Harris Index に換算して 0.92 程度となることがわかった．

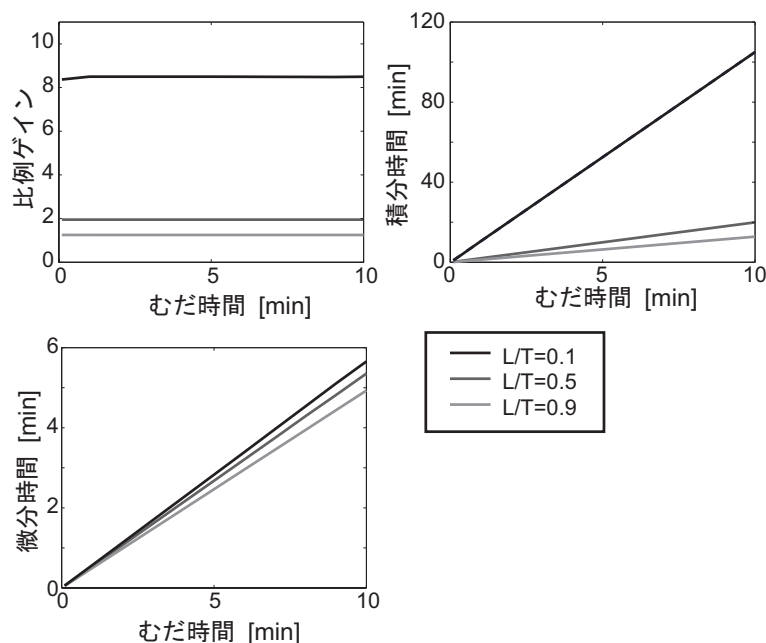


図 4: 最適化によって得られた PID チューニング (ステップ状設定値変更)

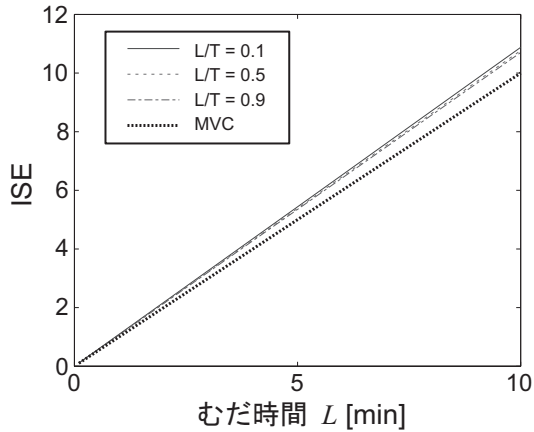


図 5: PID 制御で到達できる ISE と最小分散制御を行った場合の ISE(ステップ状設定値変更)

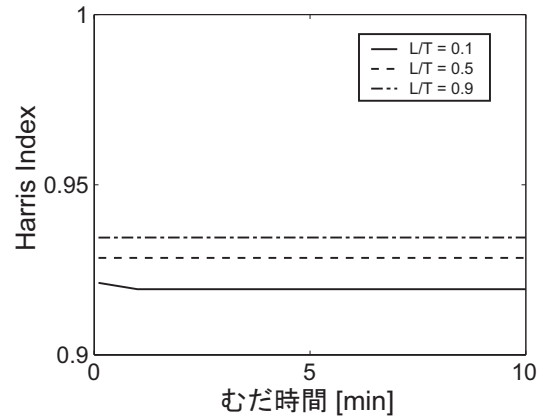


図 6: PID 制御で到達できる Harris Index の最大値 (ステップ状設定値変更)

2.3.1.1. ステップ状設定値変更に対する Harris Index の基準値の設定

2.3.1. 節の結果から，ステップ状設定値変更の場合は，評価基準の ISE がむだ時間のみに強く依存し，Harris Index が 0.92 程度まで達成できるという結果が得られた．

しかし，この結果はあくまでも数値計算による結果であり，理論的な裏付けが全くない．そこで，はじめに外部信号 $r(t)$ から制御偏差 $e(t)$ への閉ループ伝達関数 $H_{er}(s)$ が時定数に依存しないような PID 調整パラメータを考える．これにより，制御偏差の応答波形は時定数に依存しなくなる．このような特徴を持つ PID 調整パラメータは無数にあるが，その中から ISE を最小とすることを念頭において 1 つの調整則を選択する．選択した調整則を用いた場合の ISE を計算し，Harris Index に換算してどの程度の値が実現できるのかについて検討する．この結果から，むだ時間の情報だけからステップ状設定値変更に対して PID 制御で達成し得る ISE を与えることができ，PID で達成可能な Harris Index の基準値を与えることが出来る．

2.3.1.2. 閉ループ伝達関数からの時定数の消去

設定値 $r(t)$ から制御偏差 $e(t)$ への閉ループ伝達関数 $H_{er}(s)$ は

$$\begin{aligned}
 H_{er}(s) &= \frac{1}{1 + P(s)C(s)} \\
 &= \frac{1}{1 + e^{-Ls} \frac{KK_P}{1 + Ts} \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)} \\
 &= \frac{s}{s + e^{-Ls} \frac{KK_P}{T_I} \frac{1 + T_I s + T_I T_D s^2}{1 + Ts}}
 \end{aligned} \tag{66}$$

である． $H_{er}(s)$ から時定数の影響を打ち消すことを念頭において，

$$1 + T_I s + T_I T_D s^2 = (1 + Ts)(1 + T' s) \tag{67}$$

となるように積分時間 T_I と微分時間 T_D を設定する．このような T_I と T_D は以下の通りである．

$$T_I = T + T' \quad (68)$$

$$T_D = \frac{TT'}{T + T'} \quad (69)$$

(67) 式を (66) 式に代入すると

$$H_{er}(s) = \frac{s}{s + e^{-Ls} \frac{KK_P}{T_I} (1 + T's)} \quad (70)$$

となる．この結果， K_P が $\frac{T_I}{K}$ に比例するように K_P を設定すれば閉ループ伝達関数からプロセスの定常ゲイン及び時定数の影響をなくすることができる．ここでは，ステップ状設定値変更を考えるので

$$\mathcal{L}\{e(t)\} = H_{er}(s) \mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{1}{s} H_{er}(s) \quad (71)$$

である．本来は ISE を最小化する最適化問題

$$\begin{aligned} \min_{K_P, T'} \quad & \text{ISE} = \|\mathcal{L}\{e(t)\}\|^2 \\ \text{subject to} \quad & K_P, T' > 0 \end{aligned} \quad (72)$$

を解くべきであるが，理論的な求解は困難であるため，閉ループ伝達関数がより単純な式で表されるようなチューニングを考えていく．

まず，簡単のためにむだ時間 e^{-Ls} に 1 次 Pade 近似を施す．むだ時間 e^{-Ls} について 1 次 Pade 近似を行った結果， $H_{er}(s)$ は

$$H_{er}(s) = \frac{s}{s + \frac{1 - \frac{L}{2}s}{1 + \frac{L}{2}s} \frac{KK_P}{T_I} (1 + T's)} \quad (73)$$

となる．(73) 式をより単純にすることを念頭において， $(1 + \frac{L}{2}s)$ の項を消去することを考え，

$$T' = \frac{L}{2} \quad (74)$$

とおく． K_P に関しては多くの PID 調整則がむだ時間の逆数 L^{-1} に比例していることを念頭において

$$K_P = \frac{T_I}{KL} A \quad (A > 0 \text{ は無次元の定数}) \quad (75)$$

とする．このとき， $H_{er}(s)$ は

$$H_{er}(s) = \frac{s}{\frac{A}{L} + (1 - \frac{A}{2})s} \quad (76)$$

である．この段階で，プロセスの安定性を満足するには $A \leq 2$ であることが必要条件となる．

ここで、大きさ1のステップ状設定値変更が与えられた場合のISEは

$$\begin{aligned}
 \text{ISE} &= \left\| \frac{1}{s} H_{er}(s) \right\|^2 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{A}{L} + j\omega(1 - \frac{A}{2})} \cdot \frac{1}{\frac{A}{L} - j\omega(1 - \frac{A}{2})} d\omega \quad [(8) \text{式より}] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\frac{A}{L})^2 + (1 - \frac{A}{2})^2 \omega^2} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{(\frac{A}{L})(1 - \frac{A}{2})} \tan^{-1} \left\{ \frac{L}{A} \left(1 - \frac{A}{2}\right) \omega \right\} \right]_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} \\
 &= \frac{L}{A(2 - A)} \tag{77}
 \end{aligned}$$

となり、明らかにISEは $A = 1$ のとき最小値 L をとる。この値は最小分散制御を行ったときのISEに一致している。

以上をまとめると、時定数に依存しないようにして、かつISEを小さく抑えるようなPIDチューニングは

$$\begin{aligned}
 K_P &= \frac{2T + L}{2KL} \\
 T_I &= T + \frac{L}{2} \\
 T_D &= \frac{TL}{2T + L}
 \end{aligned} \tag{78}$$

で与えられ、むだ時間を1次Pade近似で考えた場合には最小分散制御と同等の制御性能が得られる結果となった。

最適化によって計算されたPIDチューニングと提案した調整則から得られるPIDチューニングはどの程度違うのかを比較するため、2.3.1.節で求めた最適なPIDチューニングと本節のPIDチューニングをむだ時間に対してプロットしたものを図7に示す。 $\frac{L}{T} = 0.1$ における積分時間は両調整則でほぼ一致している。両調整則間で値は異なり、提案調整則の方が制御が弱いことがわかるが、むだ時間 L およびパラメータ $\frac{L}{T}$ に対する傾向は両者で一致していることがわかる。

2.3.1.3. 提案調整則の妥当性の考察

(78)式で表される調整則を計算する際に、式を簡単にするためにむだ時間のPade近似を利用している。よって、この調整則はステップ状設定値変更に対して最小分散を与えるわけではない。そこで、ISEを計算してPIDチューニングを最適化した場合の結果にどの程度近づいているかを調べると共に、制御偏差のノミナル安定性を示す。

提案調整則を適用した場合の閉ループ伝達関数 $H_{er}(s)$ は次式で表される。

$$H_{er}(s) = \frac{Ls}{Ls + e^{-Ls} (1 + \frac{L}{2}s)} \tag{79}$$

今回の調整則によって得られる閉ループ伝達関数にステップ状設定値変更を入力として与えた場合のISEは、(8)式と(79)式から

$$\text{ISE} = \left\| \frac{1}{s} H_{er}(s) \right\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L^2}{1 + \frac{5}{4}L^2\omega^2 + L^2\omega^2 \cos(L\omega) - 2L\omega \sin(L\omega)} d\omega \tag{80}$$

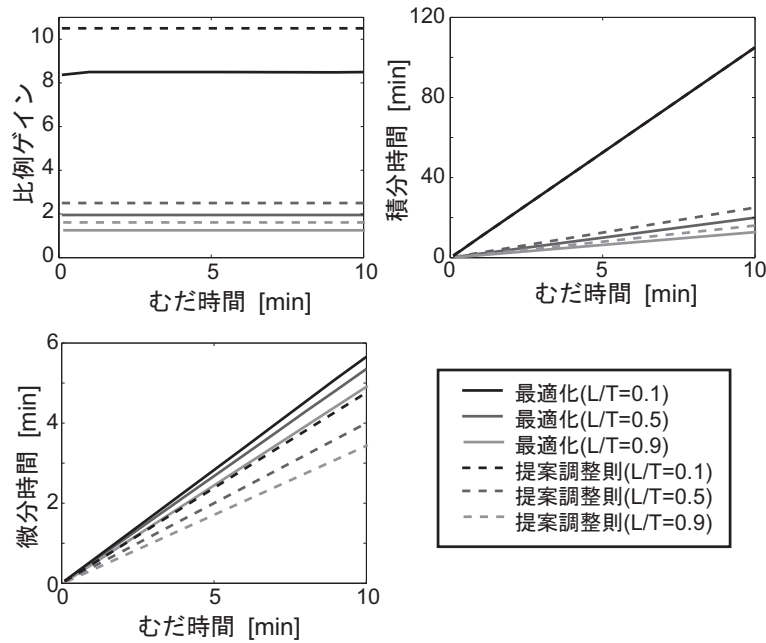


図 7: 最適化によって得られたチューニングと提案調整則の比較

となる． $L\omega = x$ とおくと， $d\omega = \frac{dx}{L}$ であるから，

$$\text{ISE} = \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{5}{4}x^2 + x^2 \cos x - 2x \sin x} dx \quad (81)$$

となり，(81) 式の被積分関数は x が 100 のとき 1.0×10^{-4} のオーダーであり，これより 1 桁程度大きい範囲で積分すれば十分な近似になると考え， -1000 から 1000 の範囲で数値積分を行った．その結果は 7.12 となった．したがって，今回提案した調整則を適用すると，本調整則で得られた ISE はむだ時間に比例し，最小分散制御を行った場合の $\frac{7.12}{2\pi} = 1.13$ 倍，Harris Index に換算して 0.88 となることがわかった．この結果は最適化から得られた結果と 5% 程度の誤差である．また，ISE は有限であるため，制御偏差のノミナル安定性を持つことが判明した．

2.3.2. 外部信号がプロセス入力側ステップ状外乱の場合

本節では外部信号 $r(t)$ がプロセス入力側ステップ状外乱に相当する場合について検討を行う． $r(t)$ の Laplace 変換 $\mathcal{L}\{r(t)\}$ は

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{K}{s(1 + Ts)} \quad (82)$$

であるから，

$$r(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \quad (83)$$

となる．ここで，最小分散制御を行った場合， $0 \leq t \leq L$ での $r(t)$ の影響は打ち消すことはできないが， $t > L$ 以降の $r(t)$ の影響は完全に打ち消されるので，最小分散制御を行った場合の ISE，すなわち ISE_{MV} は

$$\begin{aligned}
 ISE_{MV} &= \int_0^L r(t)^2 dt \\
 &= K^2 \int_0^L \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)^2 dt \\
 &= K^2 \left[t + 2Te^{-\frac{t}{T}} - \frac{T}{2}e^{-\frac{2t}{T}} \right]_{t=0}^{t=L} \\
 &= K^2 L \left\{ 1 - \frac{2}{a} (1 - e^{-a}) + \frac{1}{2a} (1 - e^{-2a}) \right\} \quad \left(a = \frac{L}{T} \text{ とする} \right) \tag{84}
 \end{aligned}$$

となる．

2.3.2.1. 2.3.1.2. 節の PID 調整則を用いたときの ISE と Harris Index

本節では，2.3.1.2. 節で提案した PID 調整則

$$\begin{aligned}
 C(s) &= K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \\
 K_P &= \frac{2T + L}{2KL} \\
 T_I &= T + \frac{L}{2} \\
 T_D &= \frac{TL}{2T + L}
 \end{aligned} \tag{85}$$

を用いた場合の ISE を計算し，Harris Index を求める．

プロセス入力側にステップ状外乱 $r(t)$ が混入した場合の ISE を考える． $r(t)$ から制御偏差 $e(t)$ への閉ループ伝達関数 $H_{er}(s)$ は

$$\begin{aligned}
 H_{er}(s) &= \frac{\tilde{P}(s)}{1 + P(s)C(s)} \\
 &= \frac{\frac{K}{1 + Ts}}{1 + e^{-Ls} \frac{K}{1 + Ts} \cdot K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)} \\
 &= \frac{K}{(1 + Ts) + e^{-Ls} \frac{KK_P}{T_I s} (1 + T_I s + T_I T_D s^2)}
 \end{aligned} \tag{86}$$

で表される．したがって，ISE は

$$ISE = \left\| \frac{1}{s(1 + Ts)} H_{er}(s) \right\|^2 \tag{87}$$

である．提案調整則を用いた場合，

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(1+Ts)} H_{er}(s) &= \frac{K}{s(1+Ts) + \frac{e^{-Ls}}{L}(1+Ts)(1+\frac{L}{2}s)} \\ &= \frac{KL}{(1+Ts) \{Ls + e^{-Ls}(1+\frac{L}{2}s)\}} \end{aligned} \tag{88}$$

であるから，ISE は

$$\begin{aligned} \text{ISE} &= \left\| \frac{1}{s} H_{ed}(s) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{j\omega} H_{ed}(j\omega) \right\} \left\{ \frac{1}{-j\omega} H_{ed}(-j\omega) \right\} d\omega \quad [(8) \text{ 式より}] \\ &= \frac{K^2 L^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+jT\omega) \{jL\omega + e^{-jL\omega}(1+j\frac{L\omega}{2})\}} \cdot \frac{1}{(1-jT\omega) \{-jL\omega + e^{jL\omega}(1-j\frac{L\omega}{2})\}} d\omega \\ &= \frac{K^2 L^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+T^2\omega^2) (1+\frac{5}{4}L^2\omega^2 + L^2\omega^2 \cos L\omega - 2L\omega \sin L\omega)} d\omega \\ &= \frac{K^2 L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left\{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right\} (1 + \frac{5}{4}x^2 + x^2 \cos x - 2x \sin x)} dx \quad (L\omega = x \text{ とおく}) \end{aligned} \tag{89}$$

となる．ただし， $a = \frac{L}{T}$ とする．このときの ISE を図 8 に示す．ただし，積分については-1000 から 1000 の範囲を積分した値で近似している．図 8 には比較のため，最小分散制御を行った場合の ISE も示している．最小分散制御を行った場合でも，提案調整則を用いた PID 制御でも ISE はプロセス時定数に大きく依存していることがわかる．また，提案調整則の Harris Index を図 9 に示す．Harris Index でも $a = \frac{L}{T}$ に大きく依存し， a が大きくなるほど Harris Index も大きくなる傾向が見られる．この原因は，同じむだ時間 L でも， a が大きくなると時定数 T は小さくなり，外部信号 $r(t)$ がステップ状信号に近づくためであると考えられる．提案調整則はステップ状設定値変更に対して良好な性能を示すので， a が大きくなるほど制御性能が良くなると考えられる．

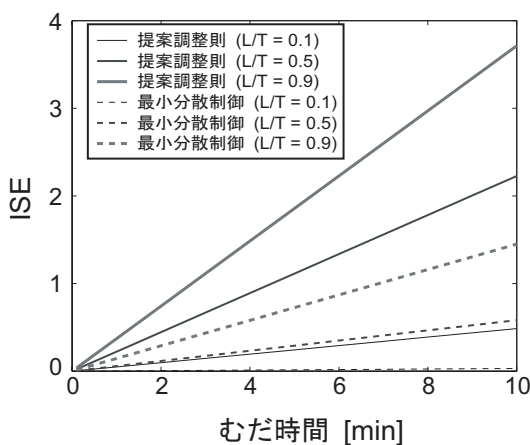


図 8: ISE の比較 (提案調整則)

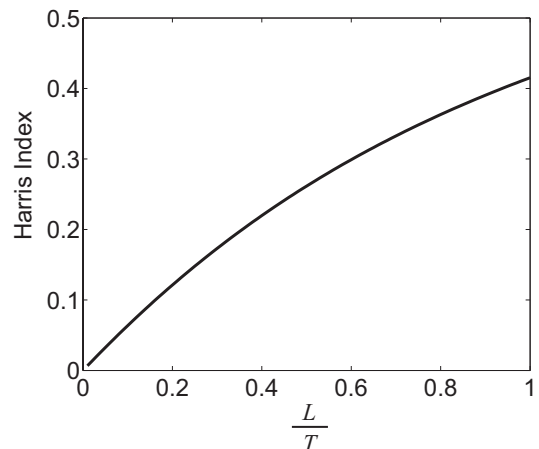


図 9: 提案調整則の Harris Index

2.3.2.2. PID 制御で達成可能な Harris Index の上限

前節では、提案調整則を用いた場合の Harris Index がパラメータ $\frac{L}{T}$ に大きく依存することを示した。本節では、PID 制御が達成しうる Harris Index の限界がどの程度かを探るため、最適化問題

$$\begin{aligned} \min_{K_P, T_I, T_D} \quad & \text{ISE} \\ \text{subject to} \quad & K_P, T_I, T_D > 0 \end{aligned} \quad (90)$$

を解いて、プロセス入力側にステップ状外乱が混入した場合に PID 制御によって達成可能な ISE の最小値を求めた。ただし、むだ時間は 5 次 Pade 近似で表現している。最適化計算の結果得られた PID チューニングを図 10 に示す。なお、提案調整則とは全く異なるチューニングであるため、参考例として、プロセス入力側へのステップ状外乱に対して良好な制御性能を示す、Ziegler and Nichols のステップ応答法 (ZN 調整則) を掲載している。ZN 調整則では積分時間と微分時間はむだ時間に比例し、 $\frac{L}{T}$ には全く依存しないので、微分時間と積分時間の破線は全て重複している。

最適化によって求めた ISE の最小値を図 11 に示す。また、このときの Harris Index を図 12 に示す。Harris Index はむだ時間にほとんど依存せず、 $\frac{L}{T}$ に対してのみ変化したので、 $\frac{L}{T}$ に対してプロットしている。この結果から、ステップ状外乱の場合、PID 制御によって達成可能な Harris Index の上限はおよそ 0.3 から 0.5 程度にしかならないという結果が得られた。

2.3.3. プロセス入力側ステップ状外乱の一般化

これまで得られた知見から、ステップ状設定値変更に対しては Harris Index に換算して 0.9 程度の制御性能を実現できるのに対し、プロセス入力側にステップ状外乱を付加した場合は Harris Index に換算して 0.3 から 0.5 程度の制御性能しか実現できない。以上のことから、外乱信号の遅れが PID 制御の制御性能の限界に大きく寄与すると考えられる。ここでは、プロセス入力側へのステップ状外乱を一般化する。動特性および外乱の信号は以下の通りである。

$$P(s) = \tilde{P}(s)e^{-Ls} = \frac{K}{1+Ts}e^{-Ls} \quad (91)$$

$$C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (92)$$

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{1}{s(1+T's)} \quad (93)$$

外部信号の時定数 T' が 0 のときはステップ状設定値変更と同等であり、外部信号の時定数 T' が T のときはプロセス入力側ステップ状外乱の混入と同等である。制御偏差 $e(t)$ の Laplace 変換 $\mathcal{L}\{e(t)\}$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e(t)\} &= H_{er}(s)\mathcal{L}\{r(t)\} \\ &= \frac{1}{s(1+T's)} \frac{1}{1+P(s)C(s)} \\ &= \frac{1+Ts}{1+T's} \frac{1}{s(1+Ts) + \frac{KK_P}{T_I}(1+T_I s + T_I T_D s^2)} \end{aligned} \quad (94)$$

で与えられる。この H_2 ノルムが ISE に相当する。

2.3.3.1. 2.3.1.2. 節の調整則を用いた場合

まず、2.3.1.2. 節の調整則

$$\begin{aligned} K_P &= \frac{2T + L}{2KL} \\ T_I &= T + \frac{L}{2} \\ T_D &= \frac{TL}{2T + L} \end{aligned} \quad (95)$$

を適用した場合の ISE について検討する．このときの $\mathcal{L}\{e(t)\}$ は

$$\mathcal{L}\{e(t)\} = \frac{1}{(1 + T's) \{Ls + e^{-Ls} (1 + \frac{L}{2}s)\}} \quad (96)$$

となるから、ISE は

$$\begin{aligned} \text{ISE} &= \left\| \frac{1}{s} H_{ed}(s) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{j\omega} H_{ed}(j\omega) \right\} \left\{ \frac{1}{-j\omega} H_{ed}(-j\omega) \right\} d\omega \quad [(8) \text{ 式より}] \\ &= \frac{L^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + jT'\omega) \{jL\omega + e^{-L\omega} (1 + j\frac{L\omega}{2})\}} \cdot \frac{1}{(1 - jT'\omega) \{-jL\omega + e^{L\omega} (1 - j\frac{L\omega}{2})\}} d\omega \\ &= \frac{L^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + T'^2\omega^2) (1 + \frac{5}{4}L^2\omega^2 + L^2\omega^2 \cos L\omega - 2L\omega \sin L\omega)} d\omega \\ &= \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left\{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right\} (1 + \frac{5}{4}x^2 + x^2 \cos x - 2x \sin x)} dx \quad (L\omega = x \text{ とおく}) \end{aligned} \quad (97)$$

となる．ただし、 $a = \frac{L}{T'}$ である．したがって、 T' を T と置き換えれば、プロセス入力側にステップ状外乱が混入した場合と同様の結果である．

また、最小分散制御を行った場合の ISE はプロセス入力側にステップ状外乱が混入した場合の結果と全く同様に、

$$\text{ISE}_{\text{MV}} = L \left\{ 1 - \frac{2}{a} (1 - e^{-a}) + \frac{1}{2a} (1 - e^{-2a}) \right\} \quad (98)$$

であるから、Harris Index は $a = \frac{L}{T'}$ の関数となり、プロセス時定数 T を外乱の遅れの時定数 T' に変更すれば、プロセス入力側にステップ状外乱が混入した場合の結果と全く同じになる．したがって、ステップ状信号を 1 次遅れフィルタに通した場合も同様に、制御性能は $a = \frac{L}{T'}$ が小さければ、すなわち、 T' が大きければ PID 制御で達成できる Harris Index の上限は低くなると考えられる．

2.3.3.2. ISE を最小とする PID チューニングの探索

したがって、提案調整則を用いた評価を諦め、非線形最適化問題

$$\begin{aligned} &\min_{K_P, T_I, T_D} \text{ISE} \\ &\text{subject to } K_P, T_I, T_D > 0 \end{aligned} \quad (99)$$

を解くことを考える．最適化によって得られた Harris Index を図 13、図 14、および図 15 に示す．各図を比較すると、むだ時間によって Harris Index の上下限が多少ずれているが、最適化計算中で途中で計算が打ち切ら

れているケースも幾つか見られ、正確な結果とは言いがたいため、Harris Index がむだ時間に依存しているかどうかははっきりしない。ただし、全体の傾向として、Harris Index は $\frac{L}{T}$ に大きく依存する一方、 $\frac{L}{T}$ にほとんど依存しない結果となり、 $\frac{L}{T}$ が大きくなるほど PID 制御で達成可能な Harris Index の上限は大きくなることわかった。以上のことから、PID 制御の制御性能の限界を決定付けるのは、外部信号が持つ遅れであることがわかる。

2.4. 数値シミュレーション

本節では上記の考察結果を確認するため、数値シミュレーションを行ってデータを作成し、作成したデータを使って制御性能評価を行う。制御系は図1の制御系を用いる。 $r(t)$ はステップ状の信号である。また、

$$P(s) = \frac{1}{1+Ts} e^{-Ls} \quad (100)$$

$$C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (101)$$

とする。制御性能評価手法はFCOR法である。なお、FCOR法ではシステム同定手法を用いることになるが、動特性モデルはARMAモデルを用い、次数は $P(s)$ 、 $C(s)$ 、 $N(s)$ を離散化したものを使って閉ループ伝達関数を計算して、そのときの分子をMA次数、分母をAR次数にした。なお、極と零点の相殺が起きる場合にはあらかじめ約分した。

2.4.1. ステップ状設定値変更の場合

ステップ状設定値変更の場合は、

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{1}{s} \quad (102)$$

である。PIDチューニングは2.3.1.2.節の調整則

$$K_P = \frac{2T+L}{2L} \quad (103)$$

$$T_I = T + \frac{L}{2} \quad (104)$$

$$T_D = \frac{TL}{2T+L} \quad (105)$$

を適用する。 L を1分から10分の間で、 $\frac{L}{T}$ を0.1から1の間でそれぞれ変化させながらシミュレーションデータを採用した。サンプリング周期は0.5分としている。 L が5分のときの制御偏差データを図16に示す。この調整則を用いた場合、理論的には時定数 T によらず制御偏差は一致するはずであるが、多少のずれが見られる。これはステップ状設定値変更が起きた時の微分動作による急激な操作量の変化が原因である。したがって、微分によるずれの影響を抑えるため、不完全微分を用いることにした。試行錯誤の結果、不完全微分の時定数は20秒とした。不完全微分を用いた場合の制御偏差のデータを図17に示す。この結果から、制御偏差は時定数にほとんど依存しなくなっていることがわかる。以降、本節で行われる連続時間系のシミュレーションにおいては、微分動作は時定数を20秒とした不完全微分を用いるものとする。

なお、不完全微分を用いたPIDチューニング最適化の結果については2.4.4.節で述べる。

以上の条件の下、制御偏差のデータを発生させ、ステップ状設定値変更が起きてから500分間のデータ(1000点)を採用し、制御性能の評価を行った。測定データから計算したISEを図18に、Harris Indexを図19に示す。図20の提案調整則は2.3.1.2.節の調整則を適用した場合の結果である。なお、Harris Indexについては、FCOR法を用いて計算を行った。

FCOR 法で Harris Index を推定した結果と、ISE から Harris Index を計算した結果はほぼ一致している。図 19 の結果から、Harris Index がむだ時間に対して単調増加となっており、むだ時間が長い場合でも Harris Index がおよそ 0.8 と理論的な計算結果とずれている。この原因は 3 つ考えられる。1 つ目は推定した ARMA モデルの推定誤差の影響であり、2 つ目は不完全微分を使ったためである。3 つ目は、これまでの考察は連続時間系を前提としている一方、FCOR 法は離散時間系に基づいた手法であるため、連続時間系と離散時間系の性能評価結果に違いがあるものと思われる。

1 つ目の推定誤差については、AR 次数、MA 次数ともに過不足はないため、推定誤差は小さいと考えられる。また、不完全微分を用いた場合の考察結果を 2.4.4. 節で、離散時間系と連続時間系の食い違いに関する考察結果を 2.5. 節で行う。

2.4.2. プロセス入力側ステップ状外乱の場合

ステップ状外乱の場合は、

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{K}{s(1+Ts)} \quad (106)$$

である。PID チューニングは 2.3.1.2. 節の調整則

$$K_P = \frac{2T+L}{2L} \quad (107)$$

$$T_I = T + \frac{L}{2} \quad (108)$$

$$T_D = \frac{TL}{2T+L} \quad (109)$$

を適用する。以上の条件の下、制御偏差のデータを発生させ、ステップ状設定値変更が起きてから 1000 分間のデータ (2000 点) を採取し、制御性能の評価を行った。設定値変更の場合とよりもサンプリング区間を長くした理由は 500 分で設定値に収束しない場合があったためである。FCOR 法を用いた制御性能評価を行い、Harris Index を計算した。ISE を図 20 に、Harris Index を、図 21 に掲載する。図 20 の提案調整則は 2.3.1.2. 節の調整則を適用した場合の結果である。明らかに Harris Index は L/T に依存しており、高くても 0.5 以下である。したがって、PID 制御でプロセス入力側へのステップ状外乱を抑制する場合の Harris Index は設定値追従の場合に比べてかなり低い結果となることがわかる。なお、図 19 とは違い、FCOR 法からの推定結果が連続時間系の結果と大きくずれていた原因は先のステップ状設定値変更でずれが出た理由と同じであると考えられる。

2.4.3. プロセス入力側ステップ状外乱の一般化

ステップ状外乱の図 1 に示した制御系について、

$$P(s) = \tilde{P}(s)e^{-Ls} = \frac{K}{1+Ts}e^{-Ls} \quad (110)$$

$$C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (111)$$

$$N(s) = \frac{1}{1+T's} \quad (112)$$

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{1}{s(a+T's)} \quad (113)$$

と置いた場合のシミュレーションを行う。その際の PID チューニングは、2.3.3.2. 節において行った最適化の結果を適用する。むだ時間 L は 1 分から 10 分の範囲で、 $\frac{L}{T}$ は 0.1 から 1 の範囲で、 $\frac{L}{T'}$ は 0.1 から 2 の範囲で

それぞれ変化させ、ステップ状設定値変更が起きてから 1000 分間のデータ (2000 点) を採取し、制御性能の評価を行った。むだ時間 L が 6 分のときの制御性能評価結果を図 22 に、むだ時間 L が 10 分のときの制御性能評価結果を図 23 に示す。この結果から、Harris Index はプロセスのむだ時間 L と時定数 T に対してはほとんど依存せず、外部信号の遅れの時定数 T' に強く依存することがわかる。

2.4.4. 不完全微分を用いた場合の最適化結果

前節までのシミュレーション中で微分動作による数値計算上の誤差をなくすため不完全微分を用いたが、不完全微分を用いることで達成可能な Harris Index の上限が変わってしまう可能性がある。そこで本節では、不完全微分を用いた PID 制御で達成可能な Harris Index の上限を調べた。各ブロックの動特性は以下の通りである。

$$P(s) = \tilde{P}(s)e^{-Ls} = \frac{K}{1+Ts}e^{-Ls} \quad (114)$$

$$C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + \frac{1}{3}s} \right) \quad (115)$$

$$N(s) = \frac{1}{1+T's} \quad (116)$$

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{1}{s(a+T's)} \quad (117)$$

このときに、ISE を最小とする PID チューニングを求めた。なお、最適化の際にむだ時間は 5 次 Pade 近似を用いている。最適化の結果得られた ISE から計算した Harris Index をむだ時間 L が 3 分、6 分、10 分の順に図 24、図 25、図 26 に示す。また、ステップ状設定値変更を行った場合 ($T' = 0$) の結果を図 27 に示す。以上の結果と 2.3.1. 節、および 2.3.3.2. 節の最適化結果と比較すると不完全微分を用いない場合と大体同じ傾向が見られ、Harris Index 自体もあまり変わらないことがわかった。

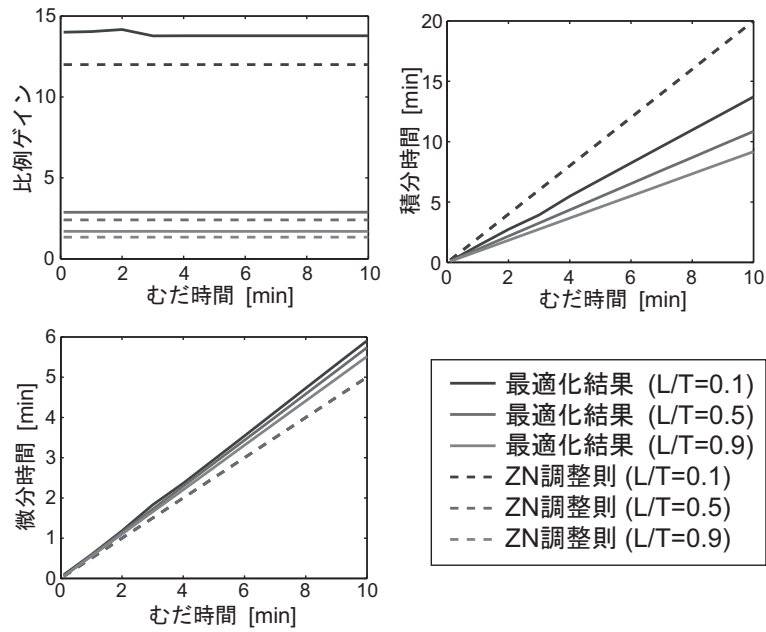


図 10: 最適化によって求めた PID 調整パラメータ

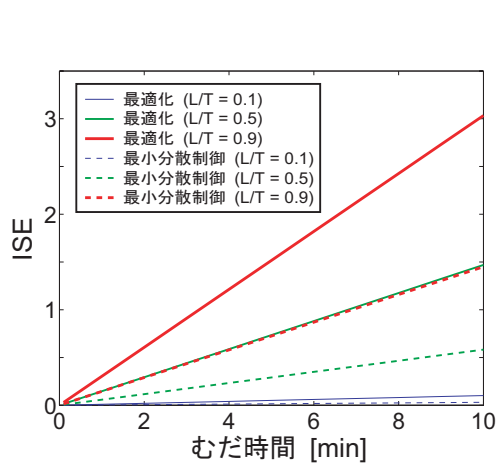


図 11: ISE の比較 (最適化結果)

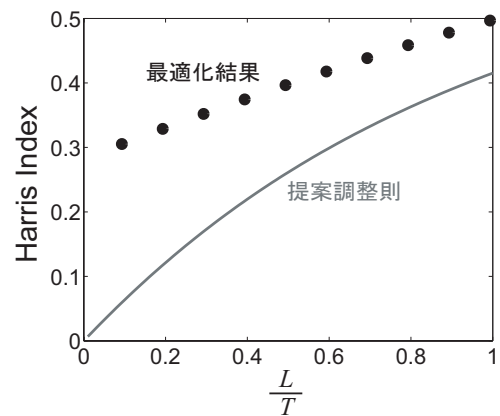


図 12: PID 制御によって達成可能な Harris Index の最大値

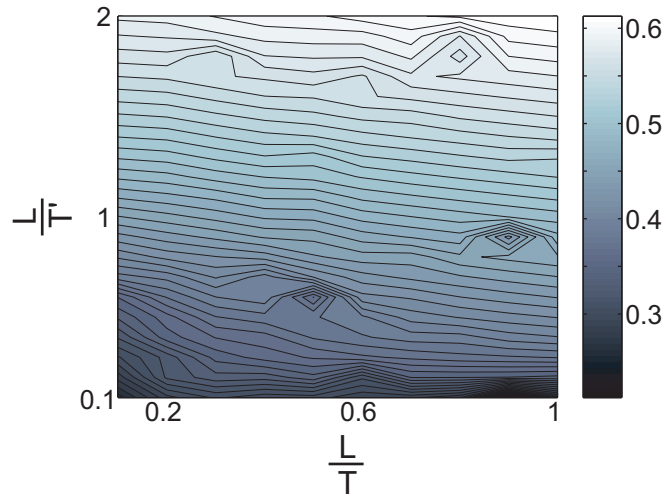


図 13: 最適化で求めた Harris Index($L=3$ 分)

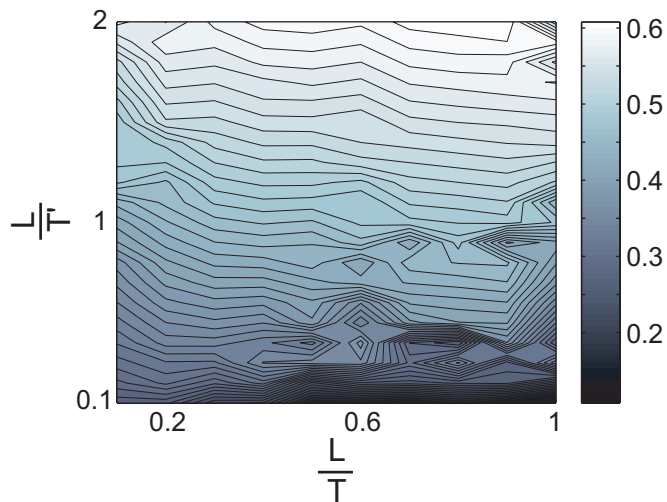


図 14: 最適化で求めた Harris Index($L=6$ 分)

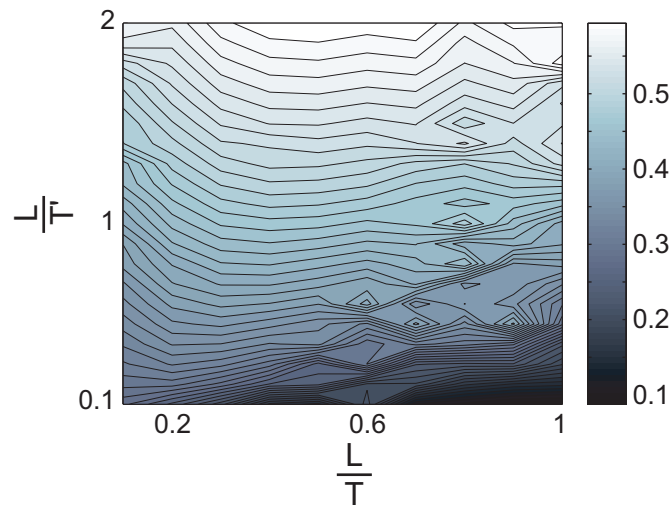


図 15: 最適化で求めた Harris Index ($L=10$ 分)

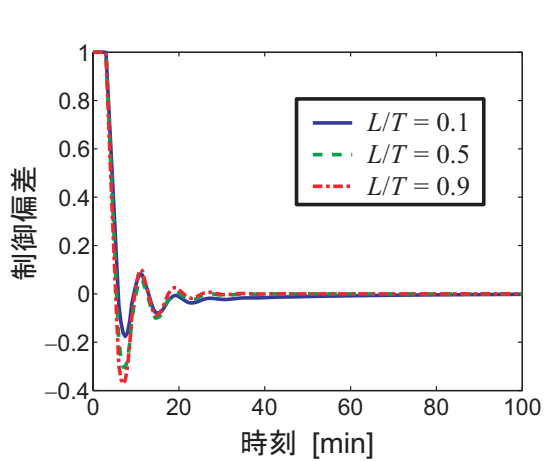


図 16: 制御偏差データ ($L=5$ 分)

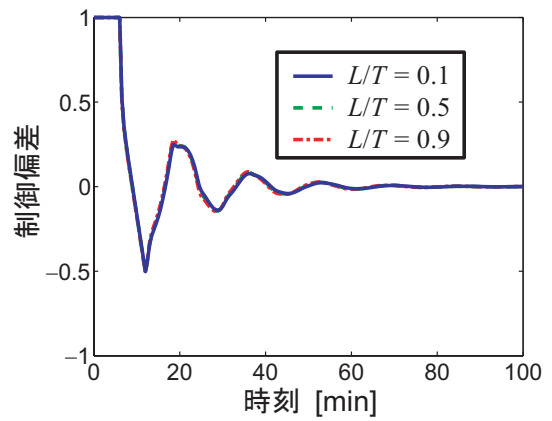


図 17: 制御偏差データ ($L=5$ 分), 不完全微分

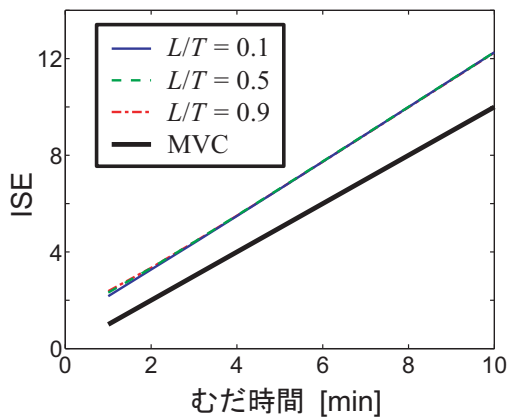


図 18: ISE(設定値変更)

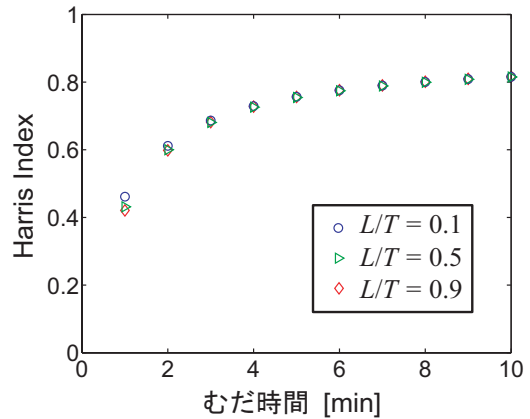


図 19: Harris Index(設定値変更)

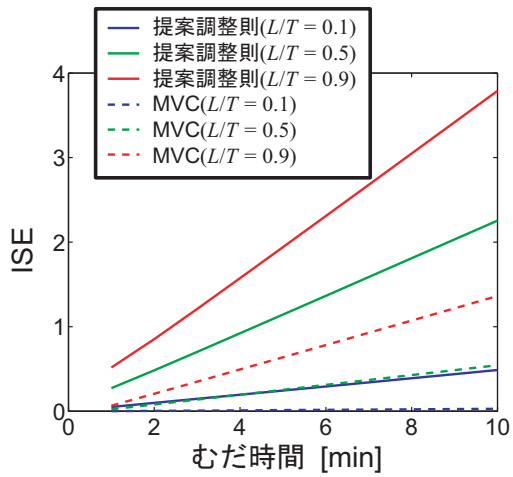


図 20: ISE(外乱混入)

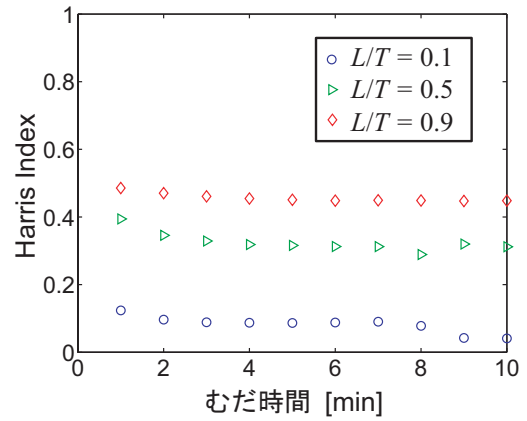


図 21: Harris Index(外乱混入)

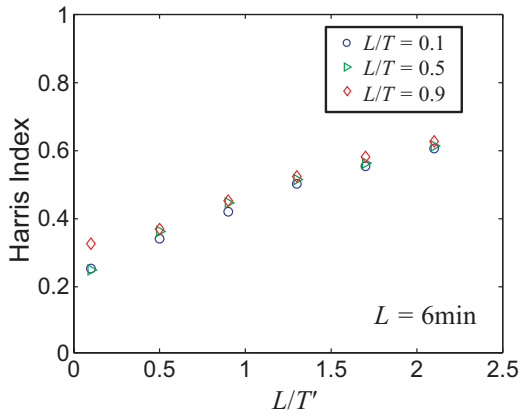


図 22: 制御性能評価結果 ($L = 6$ 分)

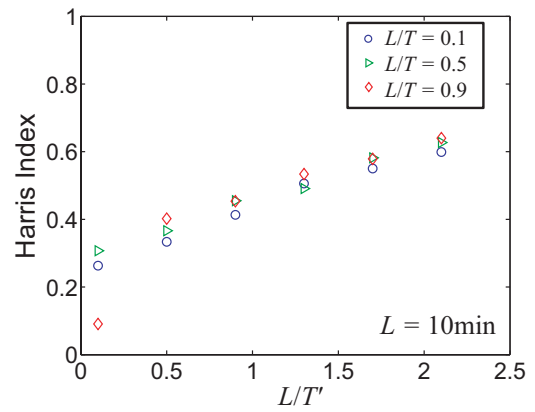


図 23: 制御性能評価結果 ($L = 10$ 分)

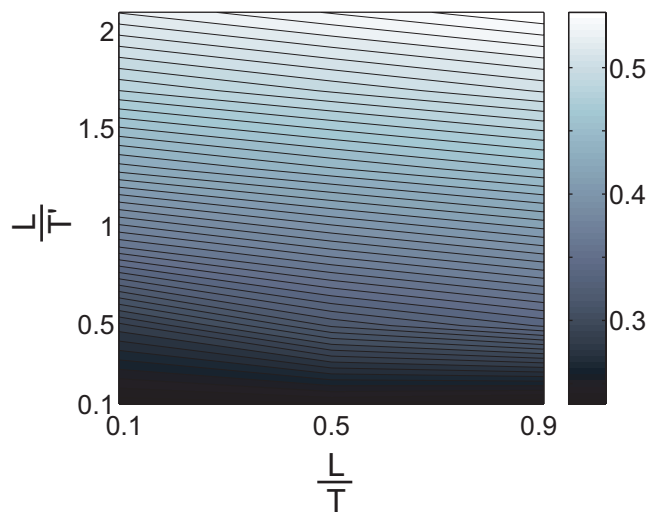


図 24: 最適化で求めた Harris Index($L=3$ 分, 不完全微分)

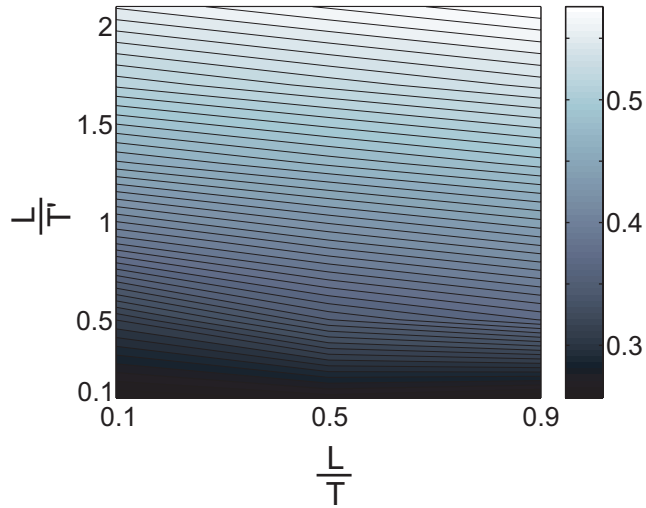


図 25: 最適化で求めた Harris Index($L=6$ 分, 不完全微分)

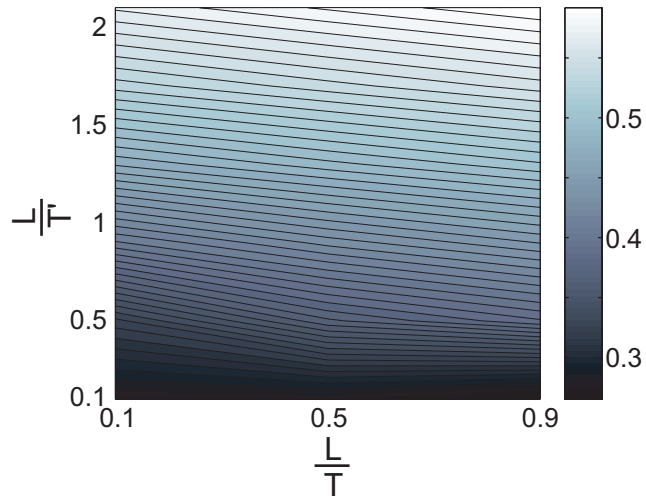


図 26: 最適化で求めた Harris Index($L=10$ 分, 不完全微分)

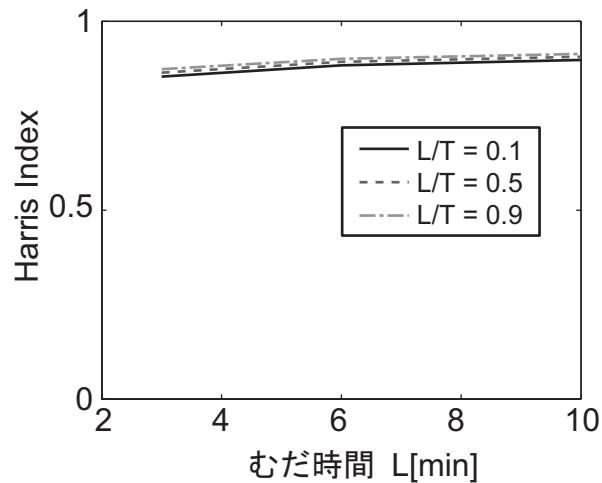


図 27: 最適化で求めた Harris Index($T' = 0$ の場合, 不完全微分)

2.5. 連続時間系と離散時間系での制御性能評価の比較

PID 制御系に対して最小分散制御を行った場合の Harris Index の上限は外乱や設定値変更などの外部信号の遅れに大きく依存し、ステップ状設定値変更に対しては良好な性能を示す一方、プロセス入力側ステップ状外乱のような制御量に遅れて影響を与える場合には Harris Index の上限は小さくなるという知見が得られた。

その一方で数値シミュレーションを行った結果、連続時間系で扱った場合と、離散時間系で扱った場合の評価結果には違いが見られた。ここでは、離散時間系で扱った場合の評価結果の違いについて検討を行う。ただし、今回の検討では PID 制御系ではなく PI 制御系を用いた。この理由は 2 つあり、1 つ目は検討をより簡単にするため、2 つ目は後で行う設定値変更シミュレーションの際に微分動作により計算誤差が出るのを防ぐためである。

まず、評価の基準として、2.3.1.2. 節の PID 調整則と同様にステップ状設定値変更を行った際に制御偏差が時定数に依存しなくなるような PI 調整則を連続時間系、離散時間系の両方について考える。次にこの調整則を用いて数値シミュレーションを行い、比較を行う。

2.5.1. 対象制御系

対象とする制御系は図 1 に示した SISO 制御系である。離散時間系のサンプリング周期は T_S とし、むだ時間は L サンプル周期であるものとする。ただし、 L は整数である。以降、連続時間系のむだ時間と区別するため、連続時間系のむだ時間は L_C で統一する。プロセス動特性 P は定常ゲイン K 、時定数 T 、むだ時間 L_C の 1 時遅れとむだ時間で表現されるプロセスである。このとき、連続時間系のむだ時間 L_C と離散時間系のむだ時間 L の間には次の関係が成り立つ。

$$(L - 1)T_S \leq L_C < LT_S \quad (118)$$

コントローラは PID コントローラとする。ただし、離散時間系での微分演算子 Δ は

$$\Delta = \frac{1 - z^{-1}}{T_S} \quad (119)$$

とし、積分は $\frac{1}{\Delta}$ とする。

2.5.2. ステップ状設定値変更に対して制御偏差が時定数に依存しなくなる PI 調整則

基準となる PID コントローラとしてステップ状設定値変更に対して閉ループ伝達関数が時定数に依存しなくなる PI 調整則を考える。対象とする制御系は図 1 に示した SISO 制御系で、各ブロックの伝達関数は次の通りである。離散時間系については、

- 連続時間系

$$C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) \quad (120)$$

$$P(s) = \tilde{P}(s) e^{-L_C s} = \frac{K}{1 + T s} e^{-L_C s} \quad (121)$$

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{1}{s} \quad (122)$$

• 離散時間系

$$C(z^{-1}) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I} \frac{T_S}{1 - z^{-1}} \right) \quad (123)$$

$$P(z^{-1}) = \tilde{P}(z^{-1}) z^{-L} = \frac{K(1 - \alpha)}{1 - \alpha z^{-1}} e^{-Ls} \quad \left[\alpha = \exp \left(-\frac{T_S}{T} \right) \right] \quad (124)$$

$$N(z^{-1}) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (125)$$

まず、連続時間系の制御偏差 $e(t)$ の Laplace 変換 $\mathcal{L}\{e(t)\}$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e(t)\} &= H_{er}(s)\mathcal{L}\{r(t)\} \\ &= \frac{1}{s} \frac{1}{1 + P(s)C(s)} \\ &= \frac{1 + T_S}{s(1 + T_S) + e^{-Ls} \frac{K K_P}{T_I} (1 + T_I s)} \end{aligned} \quad (126)$$

である。したがって、 $T_I = T$ のとき、制御偏差はプロセス時定数に依存しなくなる。このとき、(126) 式は

$$\mathcal{L}\{e(t)\} = \frac{1}{s + e^{-Ls} \frac{K K_P}{T}} \quad (127)$$

となる。ここで、一般的な PI 調整則 (CHR 調整則など) を参考にして

$$K_P = A \frac{T}{K L_C} \quad (A > 0) \quad (128)$$

とおくと、 $\mathcal{L}\{e(t)\}$ は

$$\mathcal{L}\{e(t)\} = \frac{L_C}{L_C s + A e^{-Ls}} \quad (129)$$

である。なお、 e^{-Ls} を 1 次 Pade 近似で表現すると、(129) 式は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e(t)\} &= \frac{L_C}{Ls + A \frac{1 - \frac{L_C}{2}s}{1 + \frac{L_C}{2}s}} \\ &= \frac{L(1 + \frac{L}{2}s)}{s \left(1 + \frac{L_C}{2}s \right) + A \left(1 - \frac{L_C}{2}s \right)} \\ &= L_C \frac{1 + \frac{L_C}{2}s}{\frac{L_C^2}{2}s^2 + (1 - \frac{A}{2})L_C s + A} \end{aligned} \quad (130)$$

となる。ノミナル安定性を満足するためには (130) 式の極が負である必要がある。この条件を満たすためには、(130) 式の分母が 2 次関数であることに着目すると、 $-(1 - \frac{A}{2}) > 0$ すなわち $A < 2$ であれば良いことがわかる。この条件より $0 < A < 2$ を制約とする。

ここで、ISE は $\mathcal{L}\{e(t)\}$ の H_2 ノルムの平方 $\|\mathcal{L}\{e(t)\}\|^2$ であるから、Parseval の定理

$$\text{ISE} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)H(-j\omega)d\omega \quad (131)$$

より、

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}\{e(t)\}\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_C}{jL_C\omega + A e^{-jL_C\omega}} \frac{L_C}{-jL_C\omega + A e^{jL_C\omega}} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_C^2}{L_C^2\omega^2 + A^2 - 2AL_C\omega \sin(L_C\omega)} d\omega \\ &= \frac{L_C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A^2 + x^2 - 2Ax \sin x} dx \quad [x = L_C\omega] \end{aligned} \quad (132)$$

であるが、 $0 < A < 2$ について、(132) 式を求めると、図 28 のようになる。ただし、実際には積分の範囲を -10000 から 10000 にしている。なお、拡大図を図 29 に示す。図 29 の結果から、 $A = 2$ のときに最小となっているようであるが、ここでは、極小値をとる点 $a(A = 0.74)$ に注目する。このとき、 $\|e(t)\|^2 = 1.53L$ で、Harris Index に換算すると 0.65 となる。

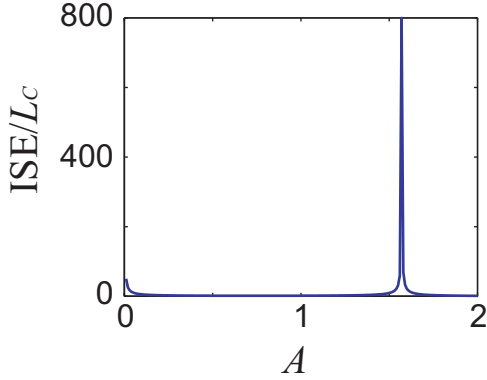


図 28: (132) 式の積分値

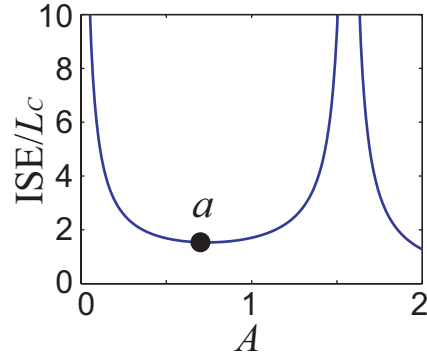


図 29: (132) 式の積分値 (拡大図)

一方、離散時間系では $a(t)$ から $e(t)$ への閉ループ伝達関数 $H_{ea}(z^{-1})$ が

$$\begin{aligned} H_{ea}(z^{-1}) &= \frac{N(z^{-1})}{1 + P(z^{-1})C(z^{-1})} \\ &= \frac{1}{1 + z^{-L} \frac{K(1-\alpha)}{1-\alpha z^{-1}} \cdot K_P \left(1 + \frac{1}{T_I} \frac{T_S}{1-z^{-1}}\right)} \frac{1}{1-z^{-1}} \\ &= \frac{1 - \alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - z^{-1}) + z^{-L} \frac{K K_P}{T_I} (1 - \alpha) (T_I + T_S - T_I z^{-1})} \end{aligned} \quad (133)$$

であるから、制御偏差が時定数に依存しなくなるようにするには、 $T_I + T_S - T_I z^{-1}$ が $1 - \alpha z^{-1}$ で割り切れるようになれば良い。このような T_I は

$$\frac{T_I}{T_I + T_S} = \alpha \quad (134)$$

を解いて、

$$T_I = \frac{\alpha}{1 - \alpha} T_S \quad (135)$$

で与えられる。この結果を適用すると、

$$H_{ea}(z^{-1}) = \frac{1}{1 - z^{-1} + \frac{K K_P T_S}{T_I} z^{-L}} \quad (136)$$

となる。連続時間系の場合と同様にして、

$$K_P = A \frac{T_I}{K T_S} = A \frac{\alpha}{K(1 - \alpha)} \quad (137)$$

と置けば、

$$H_{ea}(z^{-1}) = \frac{1}{1 - z^{-1} + A z^{-L}} \quad (138)$$

となる。ここで制御偏差の分散について、

$$\sigma_e^2 = \|H_{ea}(z^{-1})\|^2 \sigma_a^2 \quad (139)$$

が成り立つ． $\|H_{ea}(z^{-1})\|$ は $H_{ea}(z^{-1})$ の H_2 ノルム， σ_e^2 ， σ_a^2 はそれぞれ $e(t)$ ， $a(t)$ の分散である．制御偏差の分散を最小とするためには $\|H_{ea}(z^{-1})\|^2$ を最小とすればよい．そこで， $\|H_{ea}(z^{-1})\|^2$ を最小とする A を最適化計算によって求めた．このときの A の値を図 30 に示す．なお，最小分散制御を行ったときは

$$\|H_{ea}(z^{-1})\|^2 = L \quad (140)$$

であるから，Harris Index， η は

$$\eta = \frac{L}{\|H_{ea}(z^{-1})\|^2} \quad (141)$$

で表現される．最適化によって得られた A を用いたときの Harris Index を図 31 に示す．

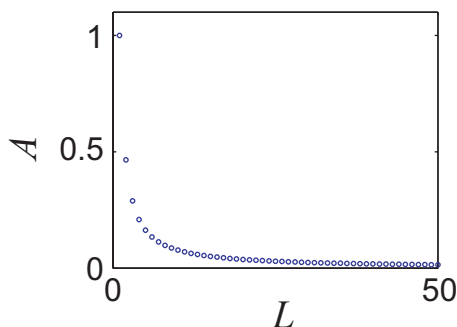


図 30: $\|H_{ea}(z^{-1})\|^2$ を最小とする A の値

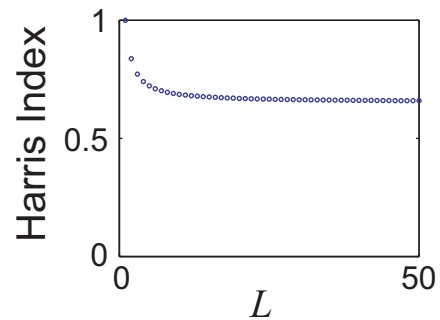


図 31: 今回用いた PI 調整則で達成可能な Harris Index の上限

$L = 1$ のときは Harris Index は 1 となり，PI 制御が最小分散制御となることがわかった．また， L が増加するにつれ，Harris Index は小さくなる傾向が見られた．さらに L が大きくなれば，Harris Index は連続時間系における調整則で得られたの Harris Index である 0.65 に近づいていることがわかる．

以上の結果から，全く同一の制御系に対して，連続時間系の評価と離散時間系の評価は全く異なるものであることがわかった．しかし，離散時間系においてもサンプリング周期を 0 に近づけていくことで L を大きくすれば，離散時間系の評価結果は連続時間系の評価結果に近づいていくと考えられる．

2.5.3. PI 制御シミュレーション

これまでの理論的な考察が成り立つかどうかをシミュレーションで確認した．対象とする制御系は図 1 に示したもので，各ブロックの設定は下記の通りである．

- 連続時間系

$$C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) \quad (142)$$

$$P(s) = \tilde{P}(s) e^{-L_C s} = \frac{K}{1 + T s} e^{-L_C s} \quad (143)$$

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{1}{s(1 + T' s)} \quad (144)$$

- 離散時間系

$$C(z^{-1}) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I} \frac{T_S}{1 - z^{-1}} \right) \quad (145)$$

$$P(z^{-1}) = \tilde{P}(z^{-1}) z^{-L} = \frac{K(1 - \alpha)}{1 - \alpha z^{-1}} e^{-Ls} \left[\alpha = \exp \left(-\frac{T_S}{T} \right) \right] \quad (146)$$

$$N(z^{-1}) = \frac{(1 - \alpha') z^{-1}}{(1 - \alpha' z^{-1})(1 - z^{-1})} \left[\alpha' = \exp \left(-\frac{T_S}{T'} \right) \right] \quad (147)$$

定常ゲイン K は 1 とし，サンプリング周期 T_S は 0.5 と 1 の 2 通りとする．時定数，むだ時間の設定は表 3 に示す時間を選択し，コントローラのチューニングは前節の結果を適用する．具体的には連続時間系では

$$K_P = 0.74 \frac{T}{KL} \quad (148)$$

$$T_I = T \quad (149)$$

となり，離散時間系では

$$K_P = A \frac{\alpha}{K(1 - \alpha)} \quad (150)$$

$$T_I = \frac{\alpha}{1 - \alpha} T_S \quad (151)$$

となる．なお，離散時間系の A は最適化結果を適用する．

表 3: 時定数，むだ時間の設定

変数	時間 [分]
L_C	1, 2, 3, \dots , 10
T	2, 5, 10, 20, 40

むだ時間 L_C が 5 分のときの，サンプリング周期 T_S が 0.5 分のときの制御偏差の波形を図 32 に， T_S が 1.0 分のときの制御偏差の波形を図 33 にそれぞれ示す．なお，連続時間系のシミュレーション結果は，時定数に依存していないのでまとめて示している．Harris Index の計算結果を図 34 に示す．連続時間系については L_C, T に関係なく Harris Index はほぼ一定値であった．一方，離散時間系の Harris Index は T には依存しないものの， L_C と T_S に大きく依存しており，離散時間系のむだ時間 L が大きくなるほど連続時間系の Harris Index に近づくことがわかる．

以上のことから，連続時間系の評価と離散時間系の評価のずれは離散時間系でのむだ時間 L に大きく左右される．具体的には L が小さいとき，すなわちサンプリング周期が長いかわた時間が短いときには離散時間系の Harris Index は連続時間系の Harris Index とは全く異なる値となるが， L が大きいとき，すなわちサンプリング周期が短いかわた時間が長いときには離散時間系の Harris Index と連続時間系の Harris Index にほぼ一致することがわかった．

ステップ状設定値変更であるため，むだ時間経過までの挙動は両者とも一定である．したがって，基準となる最小分散の評価（連続時間系では ISE，離散時間系では分散）は同等と見なすことが出来る．その一方，むだ時間経過後の制御偏差の挙動を見ると，離散時間系ではサンプリング時刻以外の挙動を見ずにサンプリングの値で一定と見なしているが，連続時間系ではその間の制御量の変動も観測されている．そのため，連続時間系と離散時間系ではサンプリング間の挙動が全く異なり，Harris Index にずれが見られる．このずれはサンプリ

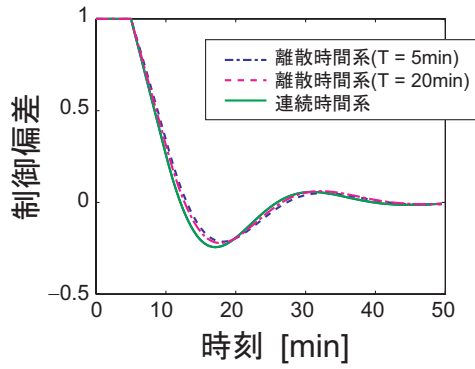


図 32: T_S が 0.5 分のときの制御偏差 ($L_C = 5$ 分)

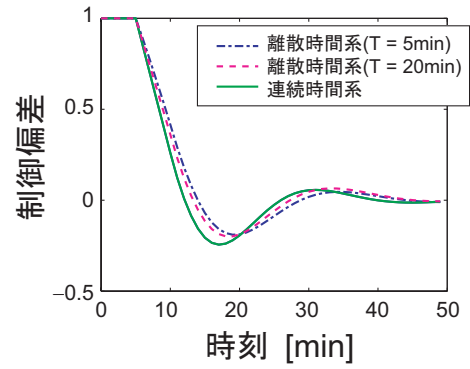


図 33: T_S が 1 分のときの制御偏差 ($L_C = 5$ 分)

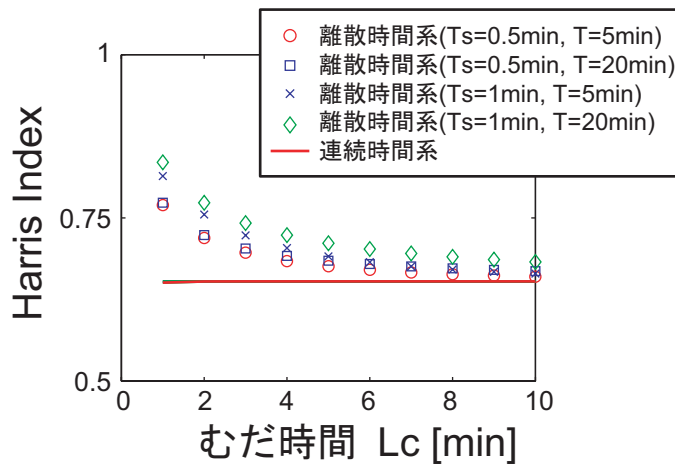


図 34: 連続時間系と離散時間系の Harris Index の比較

ング周期 T_S が長くなるほど、すなわち離散時間系のむだ時間 L が小さくなるほど顕著になることは明らかである。

また、連続時間系のむだ時間 L_C が長くなった場合には、 L も大きくなり、Harris Index のずれは小さくなるが、これは基準となる最小分散が大きくなるため、連続時間系と離散時間系間の制御偏差の ISE または分散のずれに対して Harris Index のずれが小さく見えたと考えられる。

2.6. 離散時間系での制御性能の限界に関する検討

前節の結果より，サンプリング周期が長い場合，あるいはむだ時間が短い場合には連続時間系で行った議論は成り立たないことがわかった．そこで本節では離散時間系のPID制御系が達成可能な制御性能について検討を行う．

2.6.1. 最適化による制御性能の限界の探索

はじめに，PID制御が達成できる制御性能の限界を調べるために，制御偏差の分散を最小とするようなPIDチューニングを求める最適化を行った．

2.6.1.1. ステップ状設定値変更の場合

外部信号 $r(t)$ が大きさ 1 のステップ状信号の場合，外部信号の動特性を表す伝達関数 $N(z^{-1})$ は

$$N(z^{-1}) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (152)$$

で表される．ここで，白色雑音 $a(t)$ から制御偏差 $e(t)$ への閉ループ伝達関数 $H_{ea}(z^{-1})$ は，

$$\begin{aligned} H_{ea}(z^{-1}) &= \frac{N(z^{-1})}{1 + z^{-L} \tilde{P}(z^{-1}) C(z^{-1})} \\ &= \frac{\frac{1}{1 - z^{-1}}}{1 + z^{-L} \frac{K(1-\alpha)}{1-\alpha z^{-1}} \cdot K_P \left(1 + \frac{1}{T_I} \frac{T_S}{1 - z^{-1}} + T_D \frac{1 - z^{-1}}{T_S} \right)} \\ &= \frac{1 - \alpha z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \alpha z^{-1}) + \frac{K(1-\alpha)T_S}{T_I} \cdot \left\{ 1 + T_I \frac{1 - z^{-1}}{T_S} + T_I T_D \left(\frac{1 - z^{-1}}{T_S} \right)^2 \right\}} \end{aligned} \quad (153)$$

となる．

表 4: 最適化シミュレーションの設定

変数	時間 [min]
サンプリング周期 T_S	1
むだ時間 L	1, 2, 3, ..., 10
プロセス時定数 T	2, 5, 10, 20, 40

ここで，表 4 に示した条件でむだ時間とプロセス時定数を変えつつ， $e(t)$ の分散 σ_e^2 を最小とするようなPIDチューニングを決定する最適化問題を解いた．このときのPIDチューニングを図 35 に示す．比例ゲインはむだ時間 L に対して単調減少しており，時定数 T に対しては単調増加の傾向が見られる．一方，積分時間は時定数 T に強く依存しており，むだ時間 L にはほとんど依存しない．微分時間はむだ時間 L に対して単調増加であるが，時定数 T が小さい場合には L が大きくなっても最適な微分時間は大きくなる傾向が見られる．また，このとき得られた Harris Index を載せた結果を図 36 に示す．この結果を見ると，PID制御で達成可能な Harris Index の上限は時定数に関係なくほぼ 0.9 以上を実現しており，連続時間系の考察結果と同様，PID制御でも非常に高い制御性能が得られる．

なお， L が 1 の場合に Harris Index が 1 となる理由は 2.6.2. 節で述べる．

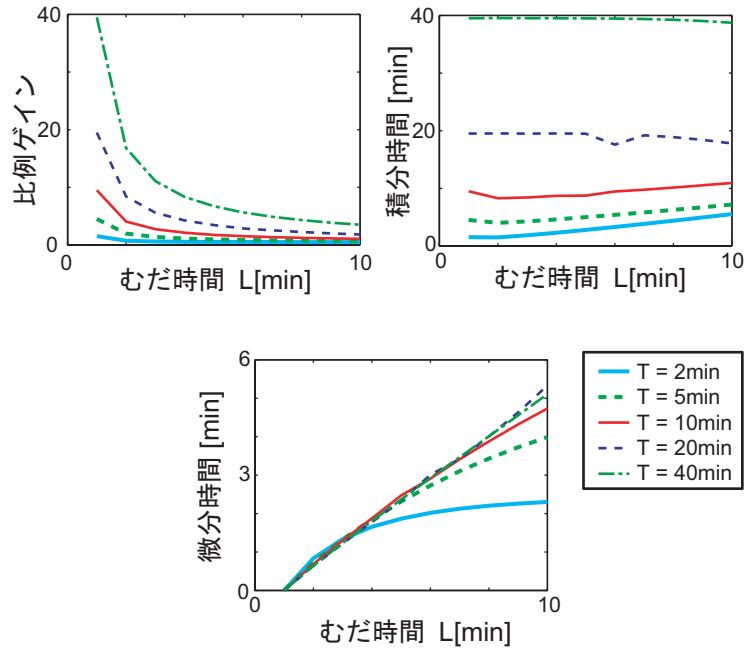


図 35: 制御偏差の分散を最小に抑える PID チューニング (ステップ状設定値変更)

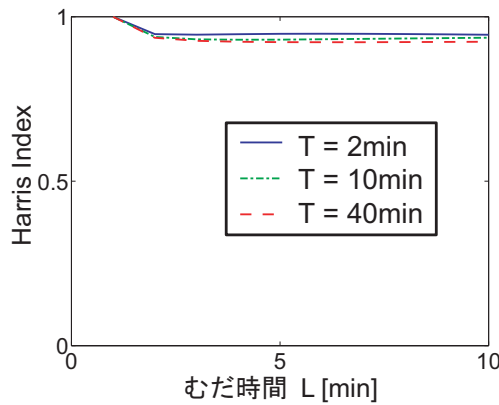


図 36: PID 制御によって得られる制御性能の限界 (ステップ状設定値変更)

2.6.1.2. プロセス入力側ステップ状外乱の場合

同様に、プロセス入力側ステップ状外乱についても $e(t)$ の分散 σ_e^2 を最小とするような PID チューニングを決定する最適化問題を解いた。ただし、プロセス入力側ステップ状外乱をより一般化して、外部信号の時定数 T' とプロセス時定数 T を独立に設定している。 $T = T'$ を満たす場合がプロセス入力側ステップ状外乱に相当する。

対象とする制御系は図 1 に示す制御系で、各ブロックの動特性は以下の通りである。

$$P(z^{-1}) = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} z^{-L} \quad \left[\alpha = \exp\left(-\frac{T_S}{T}\right) \right] \quad (154)$$

$$C(z^{-1}) = K_P \left\{ 1 + \frac{T_S}{T_I} \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{T_D}{T_S} (1 - z^{-1}) \right\} \quad (155)$$

$$N(z^{-1}) = \frac{(1 - \alpha')}{(1 - z^{-1})(1 - \alpha' z^{-1})} \quad \left[\alpha' = \exp\left(-\frac{T_S}{T'}\right) \right] \quad (156)$$

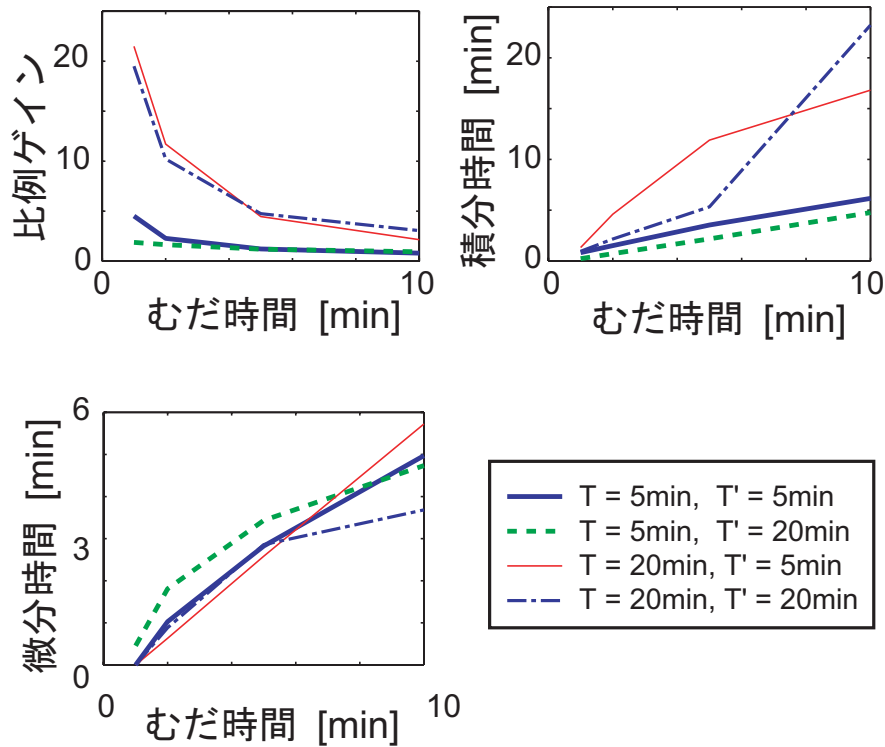


図 37: 最適化によって得られた PID チューニング (ステップ状外乱)

サンプリング周期 T_s は 1 分とする．時定数，むだ時間のシミュレーションの設定条件を表 5 に示す．各変数について表 5 に記載された値の中から 1 つずつ取り出して，合計で 100 通りの最適化シミュレーションを行った．

変数	時間 [min]
むだ時間 L_C	0, 2, 5, 10
プロセス時定数 T	2, 5, 10, 20, 40
外部信号の時定数 T'	2, 5, 10, 20, 40

最適化の結果得られた PID チューニングを図 37 L に対して Harris Index をプロットしたものを図 38 に， T に対して Harris Index をプロットしたものを図 39 に， T' に対して Harris Index をプロットしたものを図 40 にそれぞれ示す．これらの図から， $L = 1$ の場合は例外として， T が制御性能の限界に与える影響は小さく， L と T' が制御性能の限界を決定付けると考えられる．連続時間系の結果と比較すると，連続時間系での結果は Harris Index は $\frac{L_C}{T}$ に大きく依存し， $\frac{L_C}{T}$ が大きくなるほど PID 制御で達成可能な Harris Index は大きくなるという結果を得ていた．これを踏まえて離散時間系の結果を見ると， $L = 1$ のときを除けば，同じ T' では L が大きくなるほど Harris Index の限界は大きく，同じ L では T' が小さくなるほど Harris Index の限界は大きい．したがって，離散時間系の傾向と連続時間系の傾向は概ね合致していることがわかる．

なお， $L = 1$ のときには PI 制御が最小分散制御になるため，Harris Index が 1 になった．詳細については 2.6.2. 節で述べる．

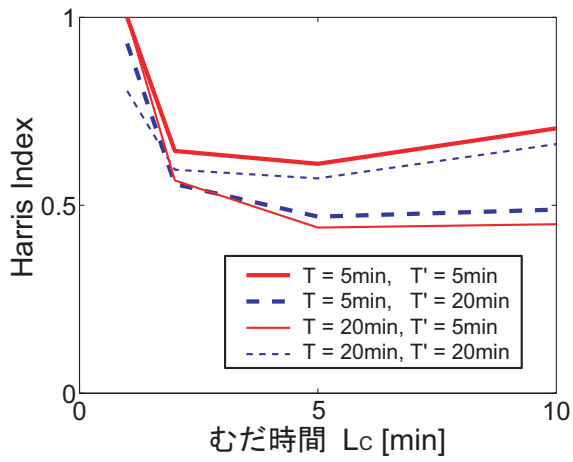


図 38: L に対する制御性能の限界 (ステップ状外乱)

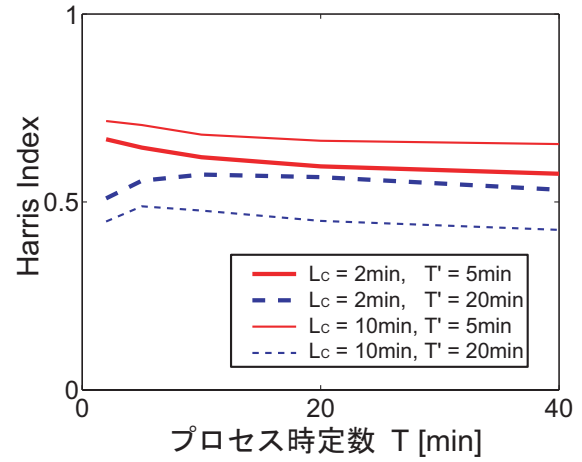


図 39: T に対する制御性能の限界 (ステップ状外乱)

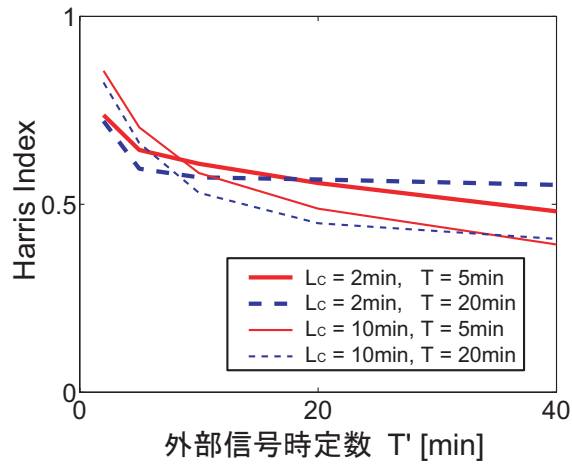


図 40: T' に対する制御性能の限界 (ステップ状外乱)

2.6.2. $L = 1$ のときの最小分散制御

離散時間系のむだ時間 L が 1 のときに PID 制御で Harris Index が 1 となった理由について考察を行った。

2.6.2.1. ステップ状設定値変更の場合

外部信号の動特性 $N(z^{-1})$ が

$$N(z^{-1}) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (157)$$

のとき，

$$\begin{aligned} N(z^{-1}) &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \\ &= 1 + z^{-1} \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &= V(z^{-1}) + z^{-1}W(z^{-1}) \end{aligned} \quad (158)$$

であるから，最小分散を実現するコントローラ $C_{MV}(z^{-1})$ は (??) 式より

$$\begin{aligned} C_{MV}(z^{-1}) &= \frac{W(z^{-1})}{V(z^{-1})\tilde{P}(z^{-1})} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{1}{1 \cdot \frac{K(1-\alpha)}{1-\alpha z^{-1}}} \\ &= \frac{\alpha}{K(1-\alpha)} \left(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha T_S} \cdot \frac{T_S}{1 - z^{-1}} \right) \end{aligned} \quad (159)$$

となる。 $C_{MV}(z^{-1})$ は比例ゲイン $K_P = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ ，積分時間 $T_I = \frac{\alpha T_S}{1-\alpha}$ の離散時間系 PI コントローラである。したがって， $L = 1$ の場合は PI 制御で最小分散を実現できる。

2.6.2.2. ステップ + 1 次遅れフィルタの設定値変更の場合

同様にしてステップ状信号が 1 次遅れフィルタを通して出てきた外部信号の動特性 $N(z^{-1})$ が

$$N(z^{-1}) = \frac{1 - \alpha'}{(1 - \alpha'z^{-1})(1 - z^{-1})} \quad \left[\alpha' = \exp\left(-\frac{T_S}{T'}\right) \right] \quad (160)$$

のとき，

$$\begin{aligned} N(z^{-1}) &= (1 - \alpha') + (1 - \alpha'^2)z^{-1} + (1 - \alpha'^3)z^{-2} + \dots \\ &= 1 - \alpha' + (1 - \alpha')z^{-1} \frac{1 + \alpha' - \alpha'z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \alpha'z^{-1})} \\ &= V(z^{-1}) + z^{-1}W(z^{-1}) \end{aligned} \quad (161)$$

であるから，最小分散を実現するコントローラ $C_{MV}(z^{-1})$ は (??) 式より

$$\begin{aligned} C_{MV}(z^{-1}) &= \frac{W(z^{-1})}{V(z^{-1})\tilde{P}(z^{-1})} \\ &= \frac{(1 - \alpha') \frac{1 + \alpha' - \alpha'z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \alpha'z^{-1})}}{(1 - \alpha') \cdot \frac{K(1-\alpha)}{1-\alpha z^{-1}}} \\ &= \frac{(1 + \alpha' - \alpha'z^{-1})}{K(1-\alpha)(1 - z^{-1})} \cdot \frac{1 - \alpha z^{-1}}{1 - \alpha'z^{-1}} \end{aligned} \quad (162)$$

である．ここで， $\alpha' = \alpha$ のとき，すなわち外部信号がプロセス入力側ステップ状外乱の場合は，

$$\begin{aligned} C_{MV}(z^{-1}) &= \frac{(1 + \alpha - \alpha z^{-1})}{K(1 - \alpha)(1 - z^{-1})} \\ &= \frac{\alpha}{K(1 - \alpha)} \left(1 + \frac{1}{\alpha T_S} \cdot \frac{T_S}{1 - z^{-1}} \right) \end{aligned} \quad (163)$$

となり，やはり PI 制御で最小分散制御を実現できる．

ただし， $\alpha' \neq \alpha$ のときは上記の考察は成り立たないので，PI 制御で最小分散を実現することはできない．また， $L > 1$ の場合は， $C_{MV}(z^{-1})$ の分母の項が z^{-1} について 2 次以上の多項式になるため，最小分散を実現するコントローラは PID 制御ではなくなる．

2.7. 結論

以上の結果から，連続時間系，離散時間系の両方において，PID 制御系に対して最小分散制御を基準とした制御性能評価手法を用いた場合，PID 制御によって達成可能な Harris Index の上限は外乱や設定値変更などの外部信号が持つ遅れに大きく依存し，遅れの影響が大きいくむだ時間が短いほど，すなわち $\frac{L_C}{T}$ が小さいほど PID 制御で達成可能な Harris Index の上限は低下することがわかった．

遅れの影響が小さい場合には外部信号はステップ信号に近づくため，基準となる最小分散が大きくなり，結果として Harris Index は大きくなる．一方，遅れの影響が大きくなれば基準となる最小分散も小さくなるため，Harris Index は小さくなると考えられる．さらに，遅れの影響が大きい場合には，制御量に付加される外部信号はランプ信号に近づくため，PID 制御では対応が困難になっていくという考え方もできると考えられる．

以上の結果より，PID 制御系に対して最小分散制御を基準とした制御性能を評価する際には，Harris Index が低くなっているから調整不良であると断定できない．外部信号の遅れの影響が大きいことが原因で PID 制御で達成可能な Harris Index の上限が低い場合もあり得るからである．

参考文献

- [1] M. J. Grimble : Integral minimum variance control and benchmarking, *Journal of Process Control*, **14**, 177-191 (2004)
- [2] T.J. Harris : Assessment of Closed Loop Performance, *Canadian Journal of Chemical Engineering*, **67**, 856-861 (1989).