

第4章 高次統計量を用いた非線形性の検出

高次統計量を用いた非線形性の検出手法についての解説と検証

執筆者

橋本 芳宏

名古屋工業大学 システムマネジメント工学科

4.1. 高次統計量と非線形性の関係

統計量は、データの集合の分布を論じるため、多数の観測点が必要であるので、いち早く検出するという目的には、統計量に基づく判断方法は適さないが、観測点の集合から対象の特性を解析するというような目的には利用可能であると考えられる。ここでは、高次統計量に基づく、非線形性の検出を検討する。Appendix に、高次統計量である、高次モーメント、高次キュムラント、スペクトル、バイスペクトルの定義、および正規分布のキュムラントの解説を示している。

4.1.1. 動的線形システムと正規分布

4.1.1.1. 線形システム

入力の分布が左右対称である場合、システムが線形であれば出力も左右対称な分布となる。しかし、システムが非線形であれば出力は左右非対称な分布となる。

微分可能な関数である場合 Taylor 展開を適用でき、線形なら 1 次の項のみ、非線形なら 2 次以上の項を持ち、線形と非線形を区別できる。

(線形システム)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} * f'(x_0)$$

(非線形システム)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} * f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} * f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} * f^{(n)}(x_0) + \dots$$

高次の項があれば、たとえ入力の分布が左右対称であっても、出力の分布は非対称になる。対称性を維持できるのは、平均値ゼロで、高次の項が奇数項のみで構成される場合に限られる。

したがって、入力の分布の対称性が確保できる場合には、出力が非対称であればシステムが非線形性であると判定できる。

4.1.1.2. 大数の法則

線形の動的システムでは、出力は入力をパルス応答で重みづけした平均値として表現できる。

$$y(k) = \sum h_i u(k-i)$$

たくさんの点でこのシステムを観測すると、この出力は平均の演算を重ねていくことになり、その場合分布は正規分布に近づく（中心極限定理）。そのため、入力が左右対称でない場合でも観測時間を長く取れば分布は正規分布に近づき、左右対称となることが期待できる。よって、動的システムでは、時定数が長く（平均をとる項の数が多く）、入力が非対称であろうが分散をもつ確率システムのような変動をしていれば、観測時間を長く（データ数を多く）とると、出力が左右対称となる。

入力が確定的で、確率システムの出力と扱えないもので、時定数も長くなければ、データ数をいくら多くとったとしても、線形系の出力が正規分布となるとことは保証できないが、振動源がランダムに振動していることが期待できる場合には、線形系であれば、出力の分布が正規分布に近づくと考えられるので、出力の分布が、正規分布から乖離している度合いによって、非線形性の評価をすることも考えられる。

4.1.1.3. 高次統計量による正規分布からの乖離の評価

高次統計量のうちキュムラントに注目すると、一次が平均、二次が分散、三次が歪み、四次が尖りを評価する指標になっていて、正規分布では三次以上はすべてゼロとなる。そのため三次以上のキュムラント、あるいはキュムラントに基づく高次統計量を評価することにより、正規分布からの隔たりが評価できる。

4.1.2. システムの持続振動と高調波成分

4.1.2.1. システムの持続振動

前節では、振動源が確率的であることを想定した議論を行ったが、この節では、振動が周期的である場合を検討する。周期的振動が、外部から入力される場合、線形システムが安定であれば、過渡的には、他の周波数成分も出力に現れるが、それらは減衰し、入力の周波数成分だけが出力に残る。

システム自体が自励振動を発生する場合を考えてみる。本来システムが安定な線形系で制御系のチューニングにより、持続振動が発生したのであれば、それは限界振動であり、限界周波数のみの周波数成分になる。飽和や不感帯、バックラッシュなどの非線形性によって、持続振動が発生する場合もあるが、そのような振動の場合、基本振動の整数倍の高調波成分を伴い、波形が正弦波とは異なる。

4.1.2.2. 非線形性による高調波成分の発生

飽和などは、微分可能な関数ではないが、微分可能な非線形システムでは、前述の Taylor 展開を適用でき、入力の高次の項が現れる。正弦波を2乗すると、加法定理より、周波数が2倍の振動になることがわかる。3乗すると、周波数は3倍になる、非線形システムに、正弦波信号が入ると、その高次の項が現れ、その入力成分の整数倍の高調波となる。

4.1.2.3. 高次統計量による高調波成分の評価

3次統計量を2次元フーリエ変換して得られるバイスペクトルの場合、片方の周波数が片方の倍となる2つ周波数成分が存在するか、3つの周波数成分 f_1, f_2, f_3 が、 $f_1 + f_2 = f_3$ の関係を満たす場合にのみ、値をもつので、持続振動でも、ひとつの周波数成分しか持たない場合や、上記の関係を満たさない周波数成分しか存在しない場合には、バイスペクトルはゼロになる。高調波成分をもつ場合には、バイスペクトルは反応するが、持たない場合には、反応しないという特性をもつので、高周波成分の検出にバイスペクトルが有効であることが期待できる。

4.1.2.3.1. バイスpekトル

バイスペクトルは以下のように周波数 f_1 、 f_2 、 $f_1 + f_2$ のスペクトルの積で表すことができる (Appendix 2 参照)。

$$B(f_1, f_2) = X(f_1)Y(f_2)Z^*(f_1 + f_2)$$

主要周波数が f_1 であるとき、 $f_1 + f_1 = f_2$ 、 $f_1 + f_2 = f_3$ で表される f_2 、 f_3 という周波数成分が存在すればバイスペクトルは値をもつ。これは主要周波数 f_1 の整数倍の周波数成分を持つことと同等であるので、バイスペクトルを評価することにより、高調波の存在を評価できる。

4.1.3. スケーリングの方法

4.1.3.1. データ全体のスケーリング

本レポートでは、圧力、液位、流量などのデータを扱う。それぞれ、測定精度など、物理的な意味を基にしたスケーリングの方法も考えられると思うが、多くの観測点の中から、非線形性に起因した振動を検出するという目的を想定しているので、いずれの信号にも同じ基準のスケーリングを行う方が、処理をしやすいと考えた。本レポートでは、いずれの信号も、平均値ゼロ、分散 1 に標準化してから高次統計量の計算を行った。

4.1.3.2. スペクトル密度のスケール

本レポートでは FFT を用いてフーリエ変換の演算を行った。FFT の演算では、スペクトル密度を算出するので、同じで一たでも、その周波数の解像度により、演算結果が異なる。ひとつの周波数成分しかもたないデータを FFT にかけて、その振幅の (FFT のデータ長 / 2) 倍が、その周波数を含むヒストグラムの領域の高さとして算出される。

本レポートでは、解析結果の数値から、FFT のデータ長の影響を除くため、パワースペクトルとして、FFT で算出したパワースペクトル密度を (FFT のデータ長 / 2) で割った値を表示している。またバイスペクトルの演算では、2 次元フーリエ変換を用いているので、バイスペクトルとして、2 次元 FFT で算出したバイスペクトル密度を (FFT のデータ長 / 2)² で割った値を用いた。

4.2. シミュレーションによるバイスペクトルの非線形性検出能力のチェック

高次統計量によって非線形性が検出できるのかを検証するために、シミュレーションを行った。パワースペクトルの算出は自己相関関数を FFT して求め、バイスペクトルは三次相関関数を 2 次元 FFT した。どちらの場合も、ウィンドウは用いずに、直接、FFT により処理した。いずれの例でも、FFT のデータ長は 256 とした。

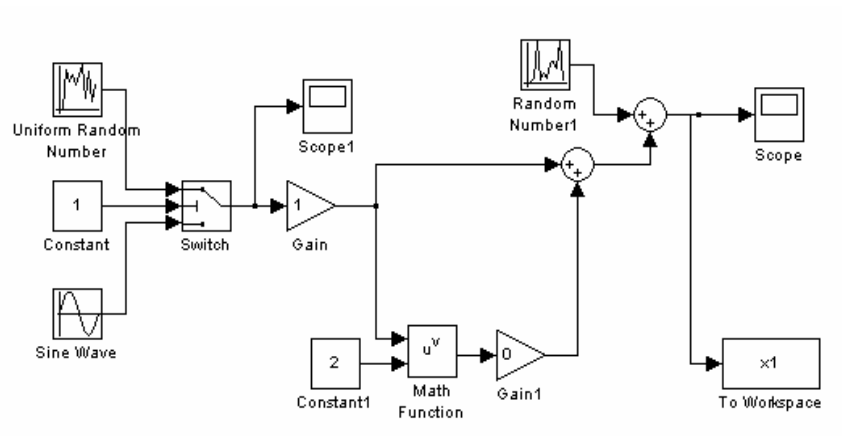
4.2.1. 高次統計量による正規分布からの乖離の評価

4.2.1.1. 微分可能な非線形性の検出

非線形性システムの出力の正規分布からの乖離を高次統計量によって評価することにより、非線形性を検出できることを確かめるため、図 1 に示すシミュレーションを行った。

正弦波の 2 乗は、加法定理より 2 倍の周波数の信号となる。そのため、周波数特性では、2 乗の項が加わると、2 倍の周波数が現れるはずである。

入力としては、一様乱数と正弦波の 2 種類を用意した。その入力に、自乗する項を加えた場合に、その影響をいかに敏感に検出できるかを検討した。いずれの信号の発生も以下の図 1 のモデルを用いて u^2 のゲインである Gain1 を変更しながら数通りの場合について行った。また正弦波では、入力がひとつの周波数成分しかないので、すべての周波数に少しはパワーを持たせるために、平均ゼロ、標準偏差 0.1 の正規乱数を加えた。

図1. u^2 検出のためのシミュレーションモデル

(一様乱数)

図1のモデルで発生源の信号は一様乱数を選択し、 u^2 のゲインが0、1、3の時の3通りのシミュレーションを行った。その結果を以下に示す。

Mean、Variance、Skewness、Kurtosis は発生させた信号を標準化した後の平均、分散、歪度、尖度の値である。data length は算出に利用したデータの数で、nfft はパワースペクトル算出の際のフーリエ変換、バイスペクトル算出の際の2次元フーリエ変換で使ったFFTのデータ長である。パワースペクトル、バイスペクトルはそれぞれの最大値と最大値をとる時の周波数（バイスペクトルは周波数の組）を示した。

	Mean	Variance	Skewness	Kurtosis	data length
Random	-2.83E-17	0.999512	0.0321735	-0.7914	2048
random& u^2 (gain=1)	4.47E-16	0.999512	0.776984	-0.144489	2048
random& u^2 (gain=3)	7.03E-16	0.999512	0.941486	0.179772	2048

	nfft	power spectrum		bispectrum	
		max	f	max	(f1,f2)
Random	256	0.03105625	(0.23828)	0.001292224	(0.48438,0.48438)
random& u^2 (gain=1)	256	0.035710938	(0.23828)	0.001424072	(0.0625,0.48438)
random& u^2 (gain=3)	256	0.031035938	(0.23828)	0.001377039	(0.023438,0.074219)

random だけの信号の時、Skewness を見ると、0.0321735 となっているので、左右対称な分布であることがわかる。その信号に u^2 のゲインを入れると、ゲインが1の時は 0.776984、ゲインが3の時は 0.91486 と、 u^2 のゲインが大きくなるほど分布が歪んで左右対称でなくなっていることがわかる。よって、 u^2 という非線形項の存在を、Skewness によって、検出できる可能性が

あることがわかる。またパワースペクトルを見ると、どれも周波数 0.23828 のところで最大値をとっていることが表からわかるが、図 2-1、図 2-2 のパワースペクトルの図を見ると、主要周波数がはっきりと表れていないことがわかる。このようにいくつもの周波数成分から成り立っている信号に u^2 という非線形要素を入れても、各周波数成分がそれぞれその 2 倍の周波数のところでパワーを持つことを確認することはできない。いくつもの周波数成分を持つような主要周波数がはっきりとしない信号では、一つ一つの周波数でのパワーが小さくなる。そのため、バイスペクトルにすると全ての周波数の組み合わせにおいて小さな値をとることになる。つまり、いくつもの周波数成分から成り立っている信号にはバイスペクトルによる検出は適さないといえる。

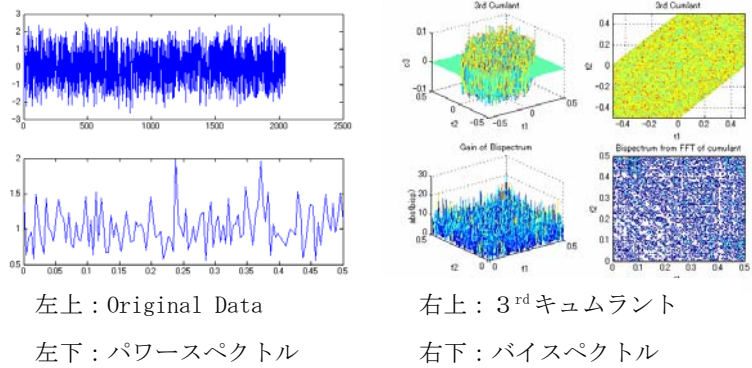
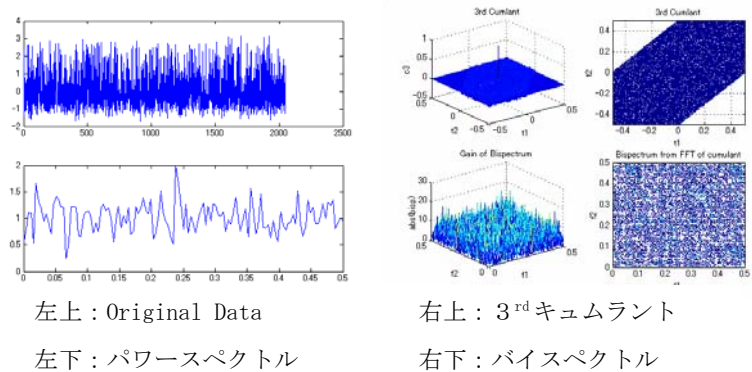


図 2-1. random のグラフ

図 2-2. random+ u^2 (gain=3) のグラフ

(正弦波)

図 1 のモデルで発生源の信号は正弦波を選択し、 u^2 のゲインが 0、1、2 の時の 3 通りのシミュレーションを行った。その結果を以下に示す。

	Mean	Variance	Skewness	Kurtosis	data length
sin	1.19E-17	0.999512	0.00411886	-1.03036	2048
sin $\&u^2$ (gain=1)	8.11E-16	0.999512	0.642589	-0.736854	2048
sin $\&u^2$ (gain=2)	4.50E-16	0.999512	0.684846	-0.613187	2048
sin $\&u^2$ (gain=3)	9.59E-16	0.999512	0.522317	-0.767415	2048

	nfft	power spectrum		bispectrum	
		max	f	max	(f1,f2)
sin	256	1.691414063	(0.0625)	0.016932428	(0.0625,0.0625)
$\sin \& u^2(\text{gain}=1)$	256	1.397339063	(0.0625)	0.311285437	(0.0625,0.0625)
$\sin \& u^2(\text{gain}=2)$	256	0.920328125	(0.0625)	0.331032025	(0.0625,0.0625)
$\sin \& u^2(\text{gain}=3)$	256	1.309389063	(0.125)	0.252415619	(0.0625,0.0625)

表の **Skewness** の値を見ると正弦波のみの場合はほとんど歪んでいないが、 u^2 を入れた場合はいずれも分布が歪んでいることがわかる。正弦波の場合も、**Skewness** によって、2乗の項が検出できることがわかる。

また、 u^2 が入った時には主要周波数の2倍の周波数にパワースペクトルを持つことが、図3-2のパワースペクトルの図から確認できる。基本の周波数が0.0625で、2乗の項で発生した信号の周波数が0.125である。

2乗の項がない場合、バイスペクトルは値を小さな値しかとらないのに、2乗の項

が存在すると、基本の周波数の組(0.0625,0.0625)で、大きな値を持つことになるので、バイスペクトルで、非線形性の検出ができる可能性があることがわかる。

しかし、乱数の計算結果のように、入力、たくさんの周波数成分を元々もっていれば、その2倍の項が発生したとしても、その検出は困難で、バイスペクトルは、非線形性の検出に適さないことがわかる。いずれの場合も、3次キウムラントである **Skewness** は、分布の歪という形で、非線形性の検出は可能であった。

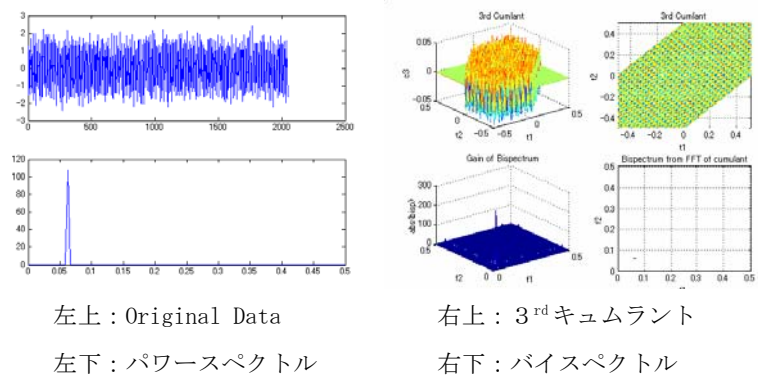


図3-1. sin のグラフ

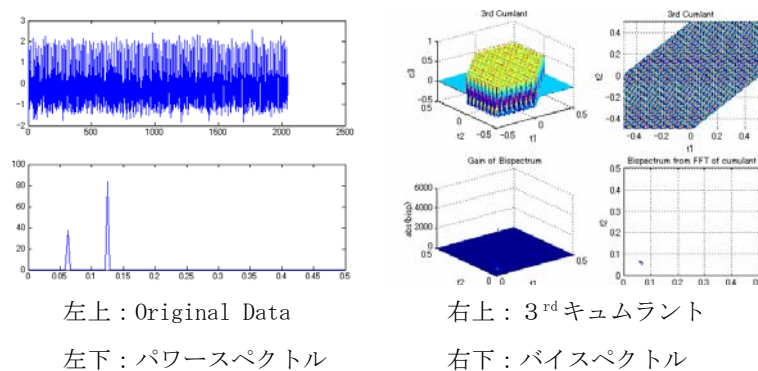


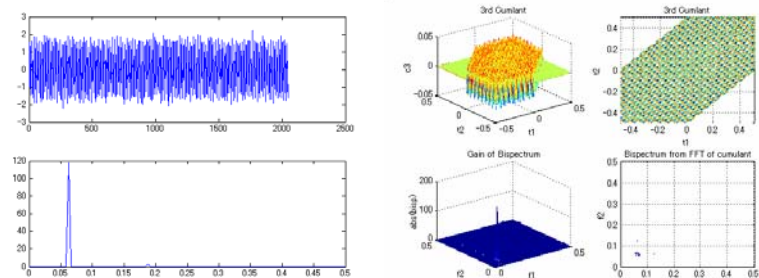
図3-2. $\sin + u^2$ (gain=3) のグラフ

4.2.1.2. u^3 の検出

	Mean	Variance	Skewness	Kurtosis	data length
sin	1.19E-17	0.999512	0.00411886	-1.03036	2048
$\sin \& u^3(\text{gain}=1)$	1.46E-17	0.999512	0.00386201	-1.02228	2048
$\sin \& u^3(\text{gain}=3)$	-3.64E-17	0.999512	0.0018177	-0.90615	2048

	nfft	power spectrum		bispectrum	
		max	f	max	(f1,f2)
sin	256	1.691414063	(0.0625)	0.016932428	(0.0625,0.0625)
$\sin \& u^3(\text{gain}=1)$	256	1.846201563	(0.0625)	0.011272552	(0.0625,0.0625)
$\sin \& u^3(\text{gain}=3)$	256	1.8633125	(0.0625)	0.006236188	(0.0625,0.0625)

図1のシミュレーションモデルを使って u^3 という非線形性が検出できるかという検証を行った。図1のモデルの u^2 を u^3 にし、発生源の信号は正弦波を選択した。その結果を以下に示す。正弦波のみの信号については u^2 のシミュレーションに用いたものと同じである。



左上: Original Data

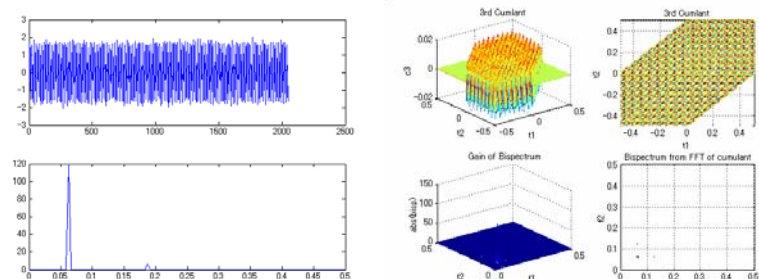
右上: 3rd キュムラント

左下: パワースペクトル

右下: バイスpekトル

図4-1. $\sin + u^3$ (gain=1) のグラフ

表の Skewness の値をみると、 u^3 を入れた信号でも正弦波のみの信号の場合と同様、歪んでいない左右対称の分布になっていることがわかる。キュムラントもほぼゼロの値で一樣になっていることから、ほぼ正規分布であると考えられる。



左上: Original Data

右上: 3rd キュムラント

左下: パワースペクトル

右下: バイスpekトル

図4-2. $\sin + u^3$ (gain=2) のグラフ

表のパワースペクトルのところを見ると、いずれの信号も主要周波数が 0.0625 と正弦波の周波数になっている。図4-1のパワースペクトルの図では u^3 の影響で表れるはずの主要周波数の3倍の周波数のところにパワーがある様子を見ることはできないが、図4-2のパワースペクトルの図では主要周波数の3倍の周波数で少しパワーを持っていることがわかる。このことから、3次の影響は主要周波数の3倍の周波数に表れることが確認できる。バイスペクトルの値を見ると、いずれの信号もほぼゼロとみなせる値になっていて、バイスペクトルから3次の影響を確認することはできない。これはバイスペクトルの性質が、パワーを持つ周波数 f_1 に対して、 $f_1 + f_1 = f_2$ や $f_1 + f_2 = f_3$ といった2倍、もしくは和となる周波数成

分を持つ場合に値を持つというものであるため、主要周波数 0.0625 に対して、その3倍の周波数 0.1875 しか持たない3次の影響のみの非線形信号では値を持つ周波数成分の組が作れないためである。よって、3次の影響のみの非線形信号を検出するのに、バイスペクトルは適さないと言える。但し、2次の項、もしくは4次の項が存在すれば、バイスペクトルの値が存在する周波数の組が存在することになり、非線形性を検出することは可能である。

4.2.1.3. 微分不可能な非線形性の検出

スイッチ、飽和、ヒステリシス、バックラッシュといった微分不可能非線形関数のうち、バックラッシュについて図5のようなモデルでシミュレーションを行った。

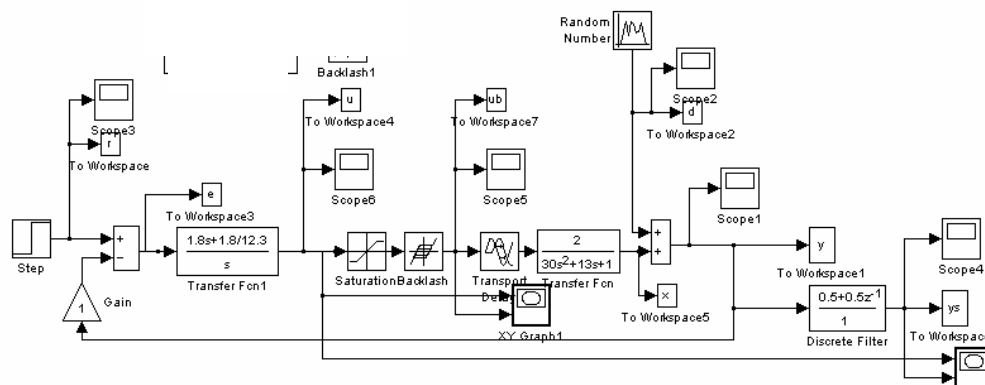


図5. バックラッシュのシミュレーションモデル

	Mean	Variance	Skewness	Kurtosis	data length
backlash	6.03E-18	0.999756	0.002524	-1.46519	4096

	nfft	power spectrum		bispectrum	
		max	f	max	(f1,f2)
backlash	256	1.824796875	(0.039063)	0.000901959	(0.039063,0.035156)

表の Skewness の値を見ると、バックラッシュの信号は歪んでいない左右対称の分布であることがわかる。キュムラントの図を見てもほぼゼロの値を一様にとっていることがわかるので、ほぼ正規分布であると考えられる。また図6

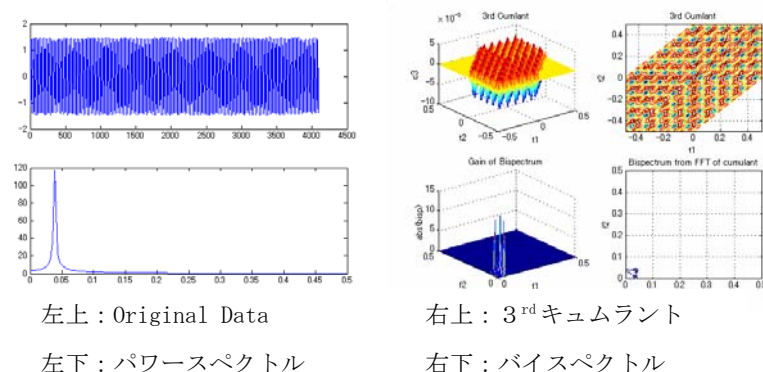


図6. backlash のグラフ

のパワースペクトルの図を見ると、主要周波数以外にピークを持つ周波数は見られないが、主要

周波数のピークの裾が広がっていることがわかる。しかし、裾の広がり主要周波数の整数倍のところまで広がっているわけではなく、主要周波数以外でピークを持たないためバイスペクトルはほぼゼロと見なせる値になっている。分布がほぼ左右対称であり、バイスペクトルが値を持たないという結果から、バックラッシュの検出にはどちらも適さないということが言える。

4.2.2. 高次統計量による高調波の検出

線形システムの限界振動は、その周波数以外の成分は減衰し、単一の正弦波となると考えられるが、非線形システムの持続振動は、主要周波数成分の整数倍の周波数成分をあわせもつ振動となる。高次統計量の高調波成分の検出能力を検証する。ここでは線形システムの持続振動として正弦波、非線形の出力波形を想定して三角波、矩形波、半円型の波、1/4 円形の波、のこぎり刃形の波などの信号を用いてシミュレーションを行った。

	Mean	Variance	Skewness	Kurtosis	data length
Vsin	-2.15E-17	0.999512	1.79E-17	1.79E-17	2048
tr	1.22E-19	0.999512	-7.48E-19	-1.18172	2048
sq	6.51E-19	0.999512	2.17E-19	2.17E-19	2048
1/2round	3.33E-15	0.999512	-0.50821	-1.04023	2048
1/4round	-7.33E-15	0.999512	-0.47427	-1.0905	2048
nokogiri	2.17E-19	0.999512	2.21E-16	-1.14452	2048

	nfft	power spectrum		bispectrum	
		max	F	max	(f1,f2)
vsin	256	1.999023438	(0.03125)	0.002518842	(0.027344,0.0039063)
tr	256	1.9674375	(0.03125)	0.002364648	(0.027344,0.0039063)
sq	256	1.717282813	(0.03125)	0.002426892	(0.0039063,0.027344)
1/2round	256	1.8970125	(0.03125)	0.198485474	(0.03125,0.03125)
1/4round	256	1.295	(0.03125)	0.25897356	(0.03125,0.03125)
nokogiri	256	1.329542188	(0.03125)	0.284501776	(0.03125,0.03125)

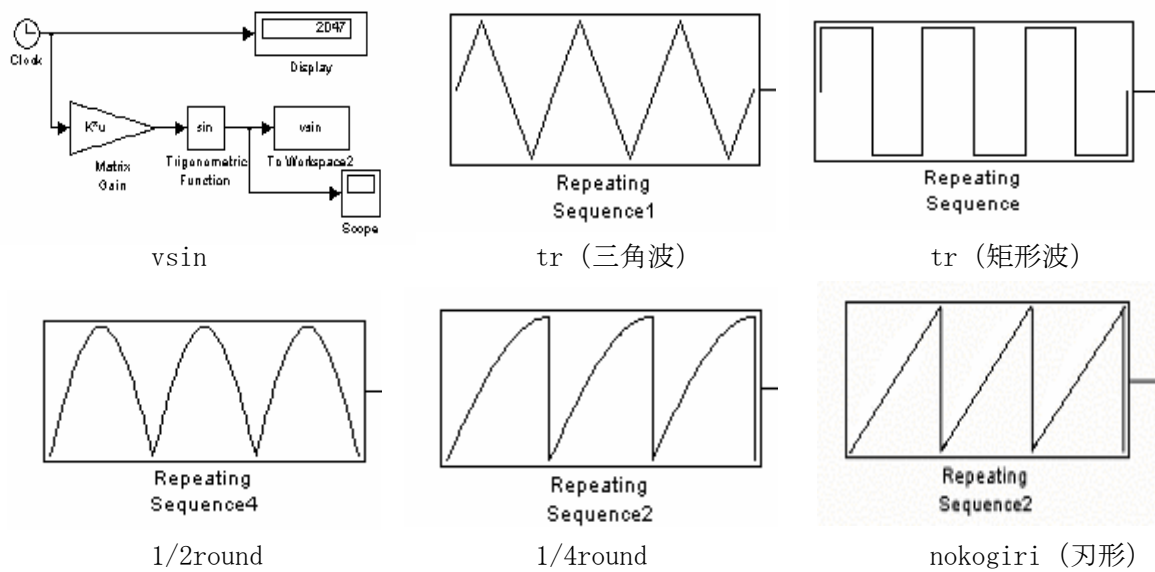


図7. それぞれの波形

ここでシミュレーションした6つの信号は全て基本周波数が 0.03125 になるように設定した。そのためどの信号を見ても主要周波数は 0.3125 になっている。

表の vsin、sq、tr の Skewness を見ると、いずれも左右対称に近い分布であることがわかる。またキュムラントも一様にほぼゼロの値となっていて、正規分布に近い分布であると言える。そして、バイスペクトルの値を見ると、sq や tr は正弦波からずれている信号であるにもかかわらず、バイスペクトルはほぼゼロという値になっていることがわかる。図8-3のパワースペクトルを見ると、主要周波数の3倍の周波数 0.09375 にはピークがあることがわかるが、2倍や4倍の周波数のところにはピークがない。そのため、3次のみの非線形性の場合と同様、パワースペクトルを見れば基本周波数の整数倍の周波数にピークがあ

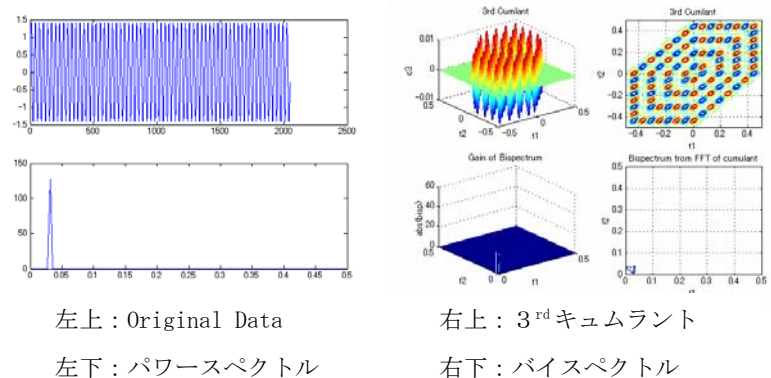


図8-1. vsin のグラフ

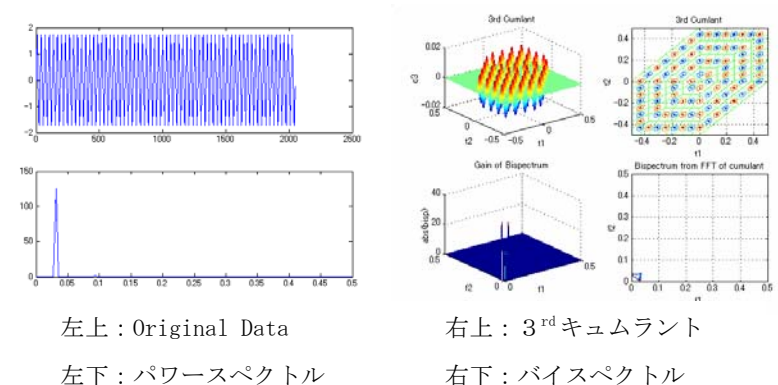


図8-2. tr (三角波) のグラフ

る。そのため、3次のみの非線形性の場合と同様、パワースペクトルを見れば基本周波数の整数倍の周波数にピークがあ

り、非線形であることは確認できるが、バイスペクトルで検出するには適さない非線形であると言える。

1/2round、1/4round という 2 つの信号の **Skewness** を見ると、いずれも歪んでいることがわかる。またバイスペクトルを見ると 0.19845474、0.25897356 と

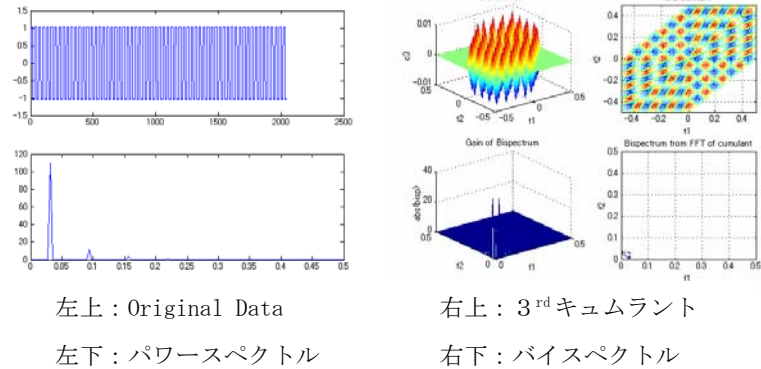


図 8-3. sq (矩形波) のグラフ

いう値を持っていてバイスペクトルから非線形であることが判断できる。図 8-4 ではよく見ることができないが、図 8-4 のパワースペクトルを見ると、基本周波数の 2 倍、3 倍、4 倍あたりまでピークがあることがわかる。また図 8-5 のバイスペクトルを見ると、等間隔に値を持つことがわかるので、パワースペクトルも基本周波数の 2 倍や 3 倍のところでわずかなピークを持っているであろうことが推測できる。このように基本周波数の 2 倍、3 倍などにピークのある信号はバイスペクトルで検出するのに適していると言える。

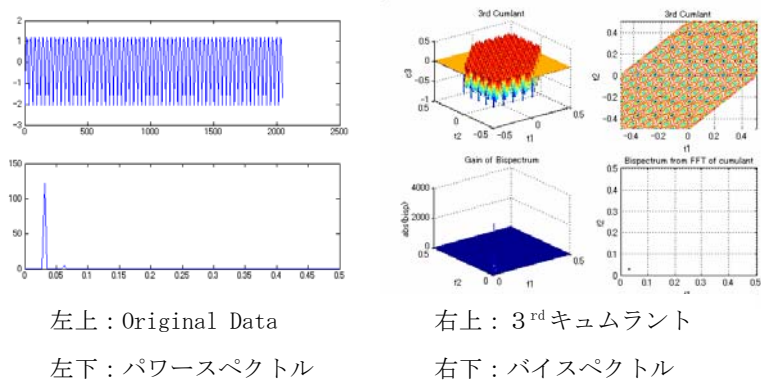


図 8-4. 1/2round のグラフ

nokogiri の **Skewness** を見ると、vsin、tr、sq の信号と同様、左右対称で歪んでいない分布であることがわかる。しかしキュムラントを見ると、ゼロに近い値にはなっていないので正規分布から乖離していることがわかる。また、バイスペクトルの値を見ると、1/2round や 1/4round と同様、値を持つことがわかる。図 8-

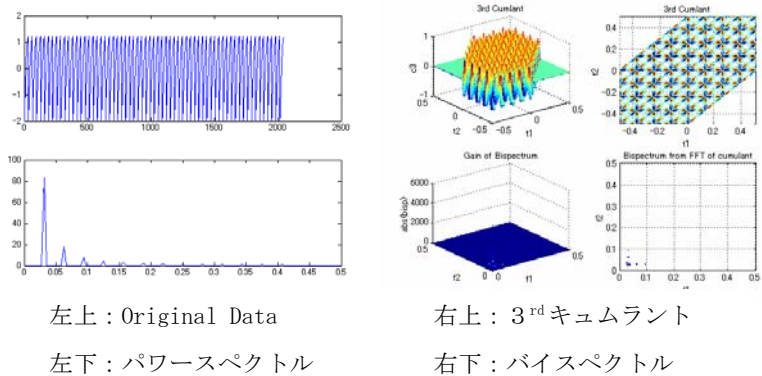


図 8-5. 1/4round のグラフ

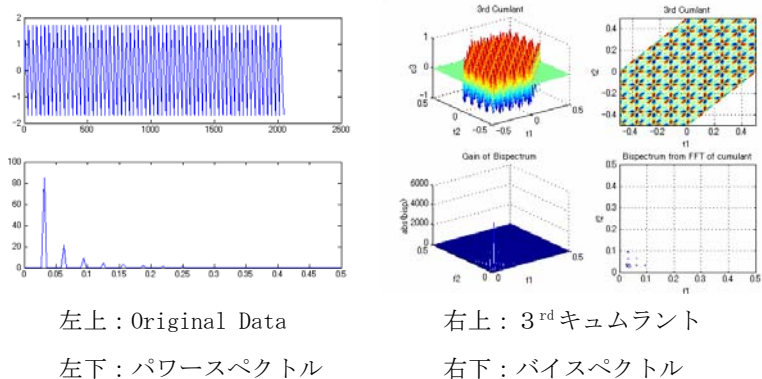


図 8-6. nokogiri (刃形) のグラフ

6 のパワースペクトルで確認すると、図 8-5 と同様、基本周波数の整数倍のところにきれいにピークが並んでいることがわかる。このように左右対称で歪んでいない分布でも、バイスペクトルの性質にあった周波数成分を持つ信号であれば非線形を確認することができ、このような信号にはバイスペクトルは適しているといえる。

この鋸波の計算例は、3 次キュムラントである **Skewness** では検出できない非線形性が、バイスペクトルで検出できることを示している。

4.2.3. 実データを対象にした非線形性の検証

シミュレーションによって、分布の歪みやバイスペクトルによる評価が非線形の検出に利用できる可能性があることがわかった。そこで、住友化学の13種類の実データを用いて検討し、その結果を示す。

	Mean	Variance	Skewness	Kurtosis	data length
sample1	9.38E-14	0.999306	0.999306	-0.82188	1441
sample2	-2.05E-14	0.999306	1.07038	1.39675	1441
sample3	1.40E-14	0.999306	-0.08287	-1.47741	1441
sample4	-6.11E-15	0.999306	0.770792	0.062201	1441
sample5	3.63E-16	0.999306	0.161705	-0.27735	1441
sample6	-3.40E-15	0.999306	-0.47668	-1.22913	1441
sample7	1.05E-14	0.999306	-0.19488	-0.35804	1441
sample8	2.68E-16	0.999306	0.260079	-0.97566	1441
sample9	2.63E-15	0.999306	-0.54215	-0.94514	1441
sample10	-1.06E-15	0.999306	-0.19908	-0.59695	1441
sample11	-1.97E-15	0.999306	-0.02126	0.050385	1441
sample12	1.15E-14	0.999306	0.114852	-0.1344	1441
sample13	-6.33E-15	0.999306	1.24221	17.4097	1441

	nfft	power spectrum		Bispectrum	
		max	f	max	(f1,f2)
sample1	256	1.464175	(0)	0.489837793	(0,0)
sample2	256	0.3024375	(0.12109)	0.031731934	(0.12109,0.12109)
sample3	256	0.948120313	(0.046875)	0.024393939	(0.046875,0.046875)
sample4	256	1.402982813	(0)	0.30073938	(0,0)
sample5	256	0.41194375	(0.12109)	0.031506561	(0.12109,0)
sample6	256	2.365098438	(0)	1.218829901	(0,0)
sample7	256	1.372734375	(0)	0.55401355	(0,0)
sample8	256	0.535767188	(0.0078125)	0.701895178	(0,0)
sample9	256	1.906420313	(0)	1.050596094	(0,0)
sample10	256	1.562965625	(0)	0.296275403	(0,0)
sample11	256	0.491910938	(0.050781)	0.01617984	(0.050781,0.050781)
sample12	256	0.19743125	(0)	0.004326263	(0,0.046875)
sample13	256	0.401267188	(0.011719)	0.354293604	(0,0)

Skewness の値を見ると、sample 3 と sample11 以外は左右対称でない、どちらかに歪んでいる分布であるといえる。バイスペクトルの値を見ると、sample 2、sample 3、sample 5、sample11、sample12 以外は値を持っていることがわかる。しかし、バイスペクトルが値を持つ周波数の組を

見てみると、値を持っている sample はいずれも (0,0) であることがわかる。パワースペクトルが最大値をとる周波数である基本周波数を見ると、周波数ゼロ以外が基本周波数になっているものもあるが、それがバイスペクトルには表れていない。以下にパワースペクトルの図を示すが、周波数ゼロ以外で最大のピークを持っているものでも、バイスペクトルが値をとるものは、周波数ゼロのところで大きなピークを持っていることがわかる。

また、図 9-13 の sample12 のパワースペクトルを見ると、ほぼ全ての周波数でパワーを持っていることがわかる。これはバイスペクトルを利用するのに適さないデータであると言える。

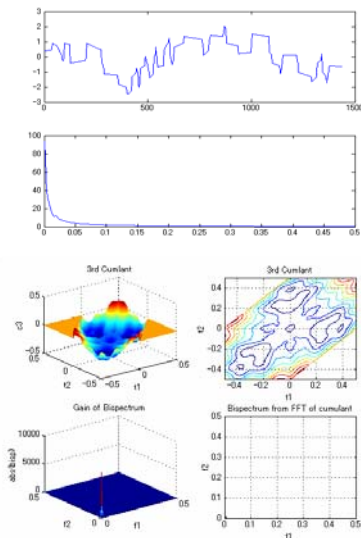


図 9-1. sample 1

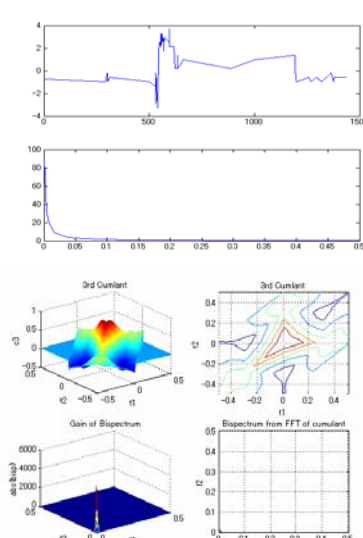


図 9-2. sample 4

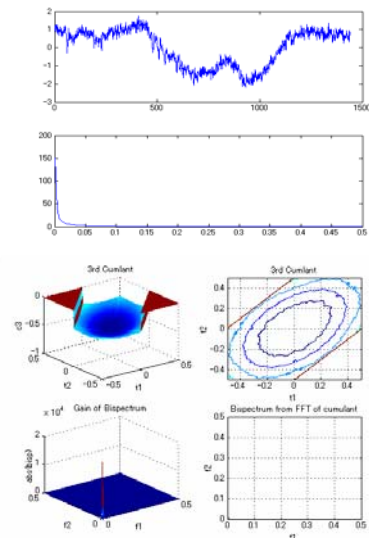


図 9-3. sample 6

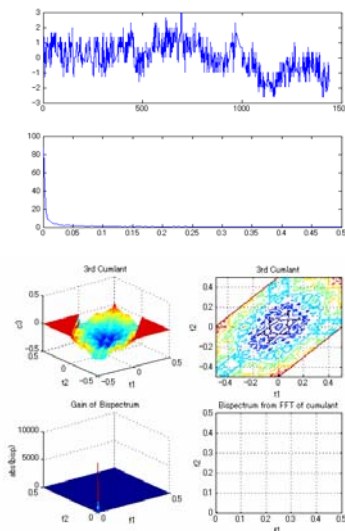


図 9-4. sample 7

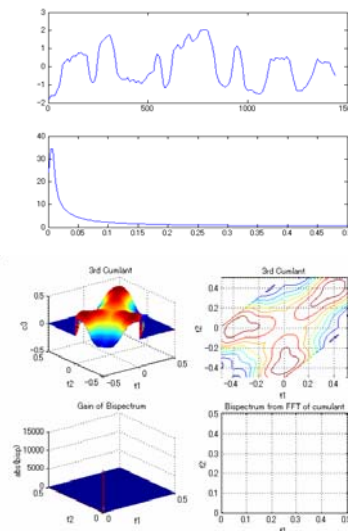


図 9-5. sample 8

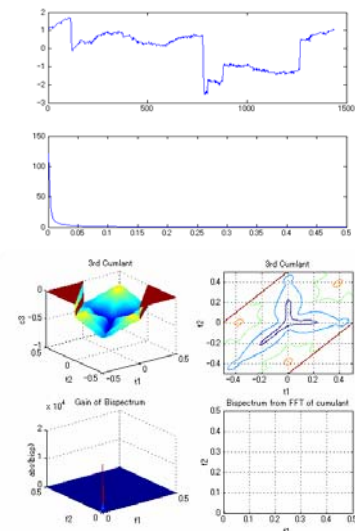


図 9-6. sample 9

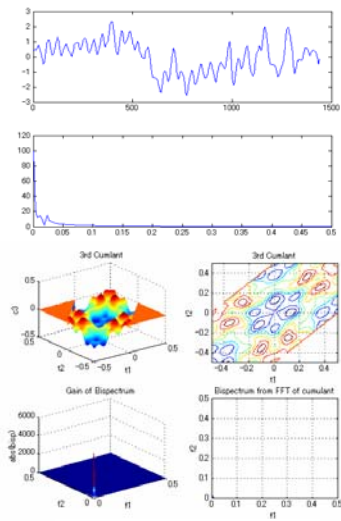


図 9-7. sample10

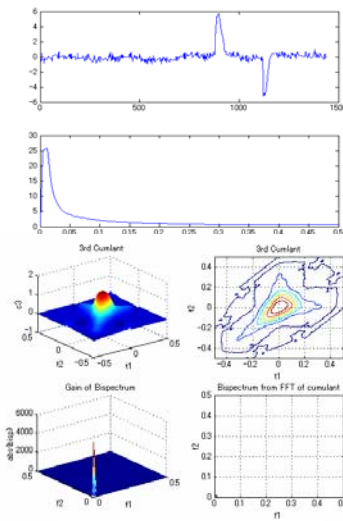


図 9-8. sample13

注) 図 9-1 から図 9-8
はバイスペクトルが値
を持つもの

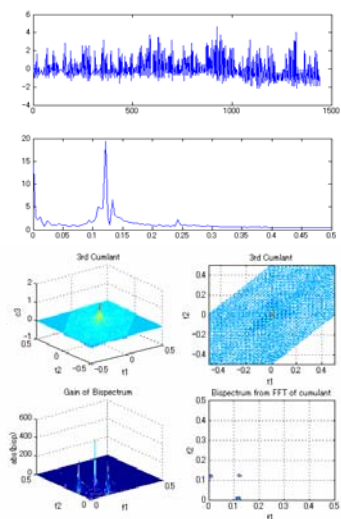


図 9-9. sample 2

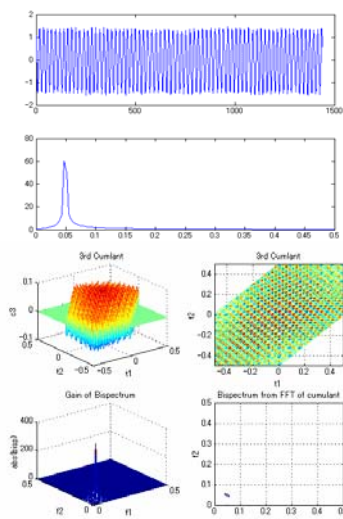


図 9-10. sample 3

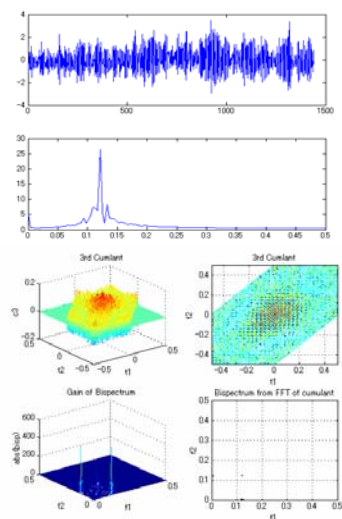


図 9-11. sample 5

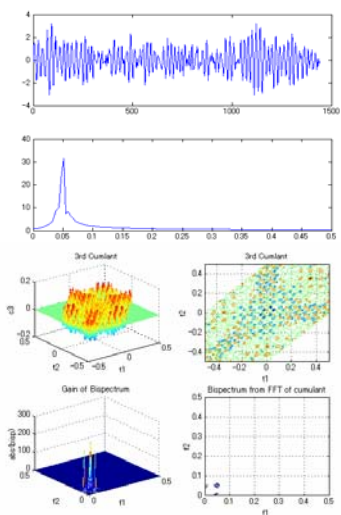


図 9-12. sample11

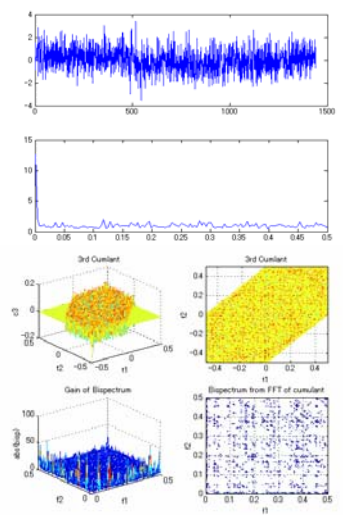


図 9-13. sample12

注) 図 9-9 から図 9-13 はバ
イスペクトルがほぼゼロと
みなせる値になるもの

住友化学のデータについて、コメントされている内容ごとの表にして示す。(?)がついているものは、コメントに(?)がついていたものである。

バルブ不良	sample 1、sample 2 (?), sample 3、sample 8、sample12
チューニング不良	sample 5、sample10 (?), sample11
ロード変更の影響	sample 9
外乱	sample13、sample 4 (単発外乱 2 回)
コメントなし	sample 6、sample 7

この表の不良具合の分類とバースペクトルが値を持つかどうかで分類したものに特に共通点を見つけることはできない。バースペクトルが周波数ゼロで値を持つということは、分布が歪んでいるということなので、その影響が大きいということが考えられる。

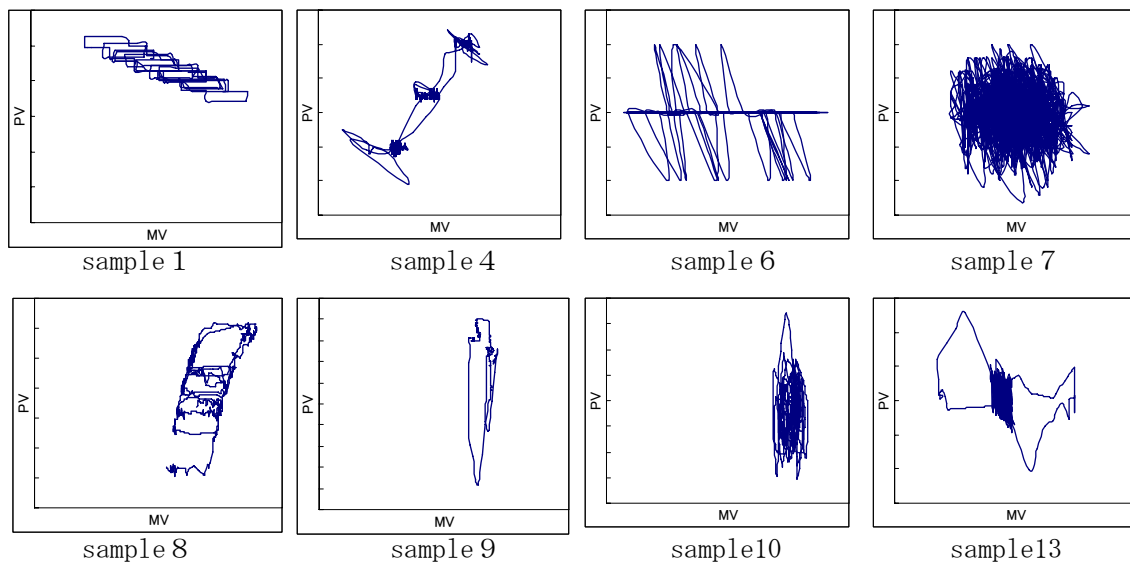


図 10. バースペクトルが値を持つ sample の PY-MV 図

図 10 と図 11 にバースペクトルが値を持つものとそうでないものに分類して、それぞれの PV-MV 図を示した。2つのグループを比較すると、図 10 の方は明らかに異常のように見える図になっているのに対し、図 11 の方は sample12 を除いて比較的きれいなマルを描いているように見える。この図を見ると、これらの分類にバースペクトルが利用できるよ

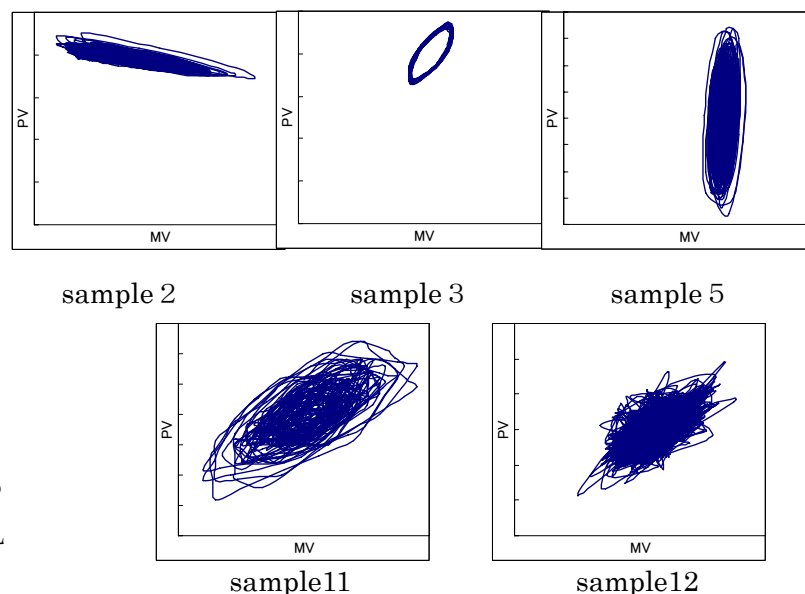


図 11. バースペクトルが値を持たない sample の PY-MV 図

うにも感じられるが、きれいにマルを描いていない分布は結局歪んだ分布になるので、結局その分類をしているに過ぎないという見方もできる。

しかし、本来高次統計量が有効である理由として、出力の情報だけからそのシステムの非線形性が検出できるということがあるので、この点から考えると図 10 と図 11 のように分類できるということは、バイスペクトルが何らかの形で利用できる可能性があると考えられる。

4.2.4. これまでに発表された高次統計量の利用に関するものの検討

4.2.4.1. バイスペクトルの利用

バイスペクトルの利用に関しては、福井で 2003 年に行われた SICE Annual Conference で Xiaoyun Zang, John Howell らによって発表された “Discrimination Between Bad Tuning and Non-linearity Induced Oscillations Through Bispectral Analysis” がある。ここでは、弁ステーションなどのバルブの非線形性は偶数倍の高調波を含むので、バイスペクトルが値を持ち、チューニング不良による非線形性はバイスペクトルが値を持たないので分類できるということが言われている。

これを今回の結果で検証してみると、実データによるものの結果では必ずしも分類ができるということは確認できなかったが、偶数倍の高調波を持つ信号はバイスペクトルが値を持つということは確認できた。

4.2.4.2. バイコヒーレンスの利用

バイコヒーレンスを利用した高次統計量による非線形性の検出については、2002 年 6 月の AdCONIP' 02 で Shoukat Choudhury, Sirish Shah らによって “Detection and diagnosis of system nonlinearities using higher order statistics” が発表された。

そこで、バイコヒーレンスを用いた方法についてもシミュレーションを行ったが、バイコヒーレンスが非線形性の検出に利用できることは確認できなかった。

(バイコヒーレンス)

バイコヒーレンスは以下のように表される。

$$|bic(f_1, f_2)|^2 = \frac{E(|B(f_1, f_2)|)^2}{E(X(f_1 + f_2))E(Y(f_1))E(Z(f_2))}$$

線形システムの持続振動である場合、そのバイスペクトルはゼロであるので、バイコヒーレンスの値はゼロとなる。これにより、システムが線形かどうかを評価することができるが、それはバイスペクトルによる評価と同じものである。実プラントでのデータでは、スペクトルが小さな値をとる周波数が存在する可能性が高く、バイスペクトルの算出値の信頼性が低くなる危険性が高い。また、バイコヒーレンスの物理的意味についても、解釈が難しい。そのため、本レポートでは、バイコヒーレンスの評価は用いなかった。

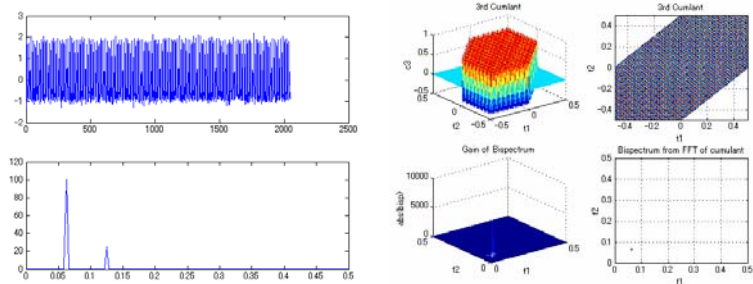
(バイコヒーレンスの検討)

図1のモデルで、正弦波を選択し、 u^2 のゲインを1にしてシミュレーションを行った。また Random Number 1 は平均ゼロ、標準偏差 0.01 の正規乱数とした。

Mean	Variance	Skewness	Kurtosis	data length	nfft
7.50E-17	0.999512	0.75188	-0.983692	2048	256

power spectrum		bispectrum		bicoherence	
max	f	max	(f1,f2)	max	(f1,f2)
1.57695	(0.0625)	0.3725596	(0.0625,0.0625)	241.1147	(0.066406,0.066406)

本来バイコヒーレンスの値は、0 から 1 の値になるはずであるが、とても大きな値になってしまっている。これはバイコヒーレンスの計算において、スペクトルが値を持たない周波数を含む組ではゼロ割が起きてしまうためである。この計算の際にも、バイスペクトルが値を持っている



左上：Original Data

左下：パワースペクトル

右上：3rd キュムラント

右下：バイスペクトル

図 12.

(0.0625,0.0625) は 1.064166 というほぼ 1 の値をとっているのであるが、パワースペクトルの図を見るとゼロとなる周波数がほとんどであるため、ゼロ割が起きる可能性がとても高い。全てのスペクトルが値を持っていれば計算は可能であるが、このような指標を使うことは値の信頼性が低いため危険であるといえる。

4.2.5. まとめ

今回、非線形性を検出するために、正規分布からの乖離と高調波成分の検出という2つの視点で検討を行った。その結果、どちらかが確認されれば非線形であるということはあるが、なかには非線形であってもどちらにも表れないこともあることがわかった。

高調波の検出では、奇数倍の成分の場合、バイスペクトルに表れないことが検証できたため、パワースペクトルで整数倍の周波数成分が存在するか否かを見て判断する方が非線形性を見つけられる場合もあるといえる。

高次統計量により非線形性を検出できる理由を整理し、シミュレーション、実データで、その検出能力を検証した。シミュレーションでは、Skewness（歪度）とバイスペクトルで、検出できる可能性があることを示したが、その検出が難しい例があることも示した。住友化学からのデータでは、MV・PV 図から、スティックがはっきり判断できる Sample1, Sample8 のデータでも、周波数ゼロのところにバイスペクトルが現れるだけで、非線形性の存在をそのデータから、結論付けることは、難しかった。高次統計量は、非線形性を検出する能力を有するとは、考えられるが、その計算結果から、非線形性を判断することは難しいと考えられる。

Appendix

A.1 高次統計量

A1.1. 中心モーメント

X の値が x 未満である確率を累積分布 $Px(x)$ とし、累積分布が x に関して微分可能であるとき、 $px(x) := \frac{d}{dx}Px(x)$ を確率密度と呼ぶ。 $x_1 < X < x_2$ である確率は、確率密度関数を用いて、 $\int_{x_1}^{x_2} px(x)$ と表される。

この確率変数 X の高次統計量は、確率分布関数 $px(x)$ を用いて、以下のように定義される。

k 次モーメント $m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k px(x)$ 平均 $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x px(x)$ は、一次モーメント
平均値からの偏りのモーメントは、中心モーメントとよばれ、

k 次モーメント $C_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k px(x)$ 分散 $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 px(x)$ は、二次中心モーメントである。モーメントと中心モーメントの間には、以下のような関係が成立する。

$C_2 = m_2 - m_1^2$ $C_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$ $C_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$
 C_3 は偏り度(skewness)、 C_4 は偏平度(flatness)と呼ばれる。

A1.2. キュムラント

次に、この確率変数のさらに一般的な関数 $h(X)$ について考える。

$h(X)$ の期待値は、次のように表現できる。

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) px(x) dx$$

$h(x) = e^{sx}$ として、その期待値を s の関数として、 $\varphi(s) = E[e^{sx}]$ と表現すると、指数関数のマクローリン展開により

$$\begin{aligned} E[e^{sx}] &= E\left[1 + sX + \frac{1}{2!}(sX)^2 + \frac{1}{3!}(sX)^3 + \cdots\right] \\ &= E[1] + sE[sX] + \frac{1}{2!}s^2E[X^2] + \frac{1}{3!}s^3E[X^3] + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} s^k m_k \end{aligned}$$

この関数を s で n 階微分して、 $s=0$ を代入すると、

$$\left. \frac{d^n}{ds^n} E[e^{sx}] \right|_{s=0} = m_n$$

と、 X の n 次モーメントが求められるので、この関数 $\varphi(s)$ をモーメント母関数とよぶ。

モーメント母関数を $\varphi(s)$ と表し、その対数 $\log \varphi(s)$ をマクローリン展開すると、

$$\log \varphi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial s^k} \log \varphi(s) \Big|_{s=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} s^k$$

となる。この c_k は、 k 次キュムラントと呼ばれ、 $\log \varphi(s)$ をキュムラント母関数とよぶ。

対数を微分すると、

$$\frac{1}{\varphi(s)} \frac{\partial}{\partial s} \varphi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} s^{k-1}$$

となり、モーメント母関数を微分すると、そのモーメントとの関係より、

$$\frac{\partial}{\partial s} \varphi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k}{(k-1)!} s^{k-1}$$

と表現できるので、キュムラントとモーメントとの関係が次のように求められる。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k}{(k-1)!} s^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} s^{k-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{k!} s^k$$

より、

$$m_n = c_1 m_{n-1} + \binom{n-1}{1} c_2 m_{n-2} + \cdots + \binom{n-1}{n-2} c_{n-1} m_1 + c_n$$

が求められる。この式より、

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ m_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ m_2 & 2m_1 & 1 & 0 & \cdots \\ m_3 & m_3 & 3m_2 & 3m_1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{A} \mathbf{c}$$

が成り立つ。したがって、キュムラントは、

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{m}$$

としてモーメントによって表現できる。また、

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -c_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -2c_2 & -c_1 & 1 & 0 & \cdots \\ -3c_3 & -3c_2 & -c_1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{B} \mathbf{m}$$

も成立するので、

$$\mathbf{m} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{c}$$

と、モーメントをキュムラントによって表現できる。

これらより、次の関係が導出され、1次キュムラントは平均、2次と3次のキュムラントは、中心モーメントと一致する。

$$c_1 = m_1 = \mu$$

$$c_2 = m_2 - m_1^2 = C_2$$

$$c_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3 = C_3$$

$$c_4 = m_4 - 4m_3 m_1 - 3m_2^2 + 12m_2 m_1^2 - 6m_1^4$$

$$\vdots$$

$$m_1 = c_1 = \mu$$

$$m_2 = c_2 + c_1^2$$

$$m_3 = c_3 + 3c_2 c_1 + c_1^3$$

$$m_4 = c_4 - 3c_2^2 + 4c_3 c_1 + 6c_2 c_1^2 + c_1^4$$

$$\vdots$$

A.1.3. 正規確率変数のモーメントとキュムラント

信号処理で用いられる最も重要な確率密度分布 $p_X(x)$ は、正規分布であり、正規分布に従う確率変数を正規確率変数という。平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ は、

$$p_X(x) = N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

と表現でき、正規確率変数のモーメント母関数 $\varphi(s)$ とキュムラント母関数 $\log \varphi(s)$ は、それぞれ、次のように表現できる。

$$\varphi(s) = \exp\left(\mu s + \frac{\sigma^2}{2} s^2\right) \quad \log \varphi(s) = \mu s + \frac{\sigma^2}{2} s^2$$

n 次キュムラントは、キュムラント母関数の n 階微分で得られるので、上式より、3 次以上のキュムラントはゼロになることがわかる。また、正規確率変数の n 次中心モーメントは、平均 $\mu = 0$ のモーメント母関数 $\varphi(s)$ の n 階微分で得られるので、

$$C_n = \begin{cases} 0 & n \text{ is odd} \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1) \sigma^n & n \text{ is even} \end{cases}$$

A.2. 高次キュムラントとスペクトル

A2.1. フーリエ変換

三角関数 $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ の線形結合として、信号を表現するフーリエ変換は、次のように定義される。

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt$$

次の逆変換により、元の信号に戻すこともできる。

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

A2.2. 高次キュムラントのスペクトル解析

$$S_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t + \tau) dt \quad \text{2 次相関}$$

$$\begin{aligned} P_{xy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t + \tau) e^{i\omega \tau} dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(\nu) e^{i\omega t} e^{i\omega \nu} dt d\nu \\ &= X^*(\omega) Y(\omega) \end{aligned} \quad \text{パワースペクトル}$$

$$c_{xyz}(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t + \tau_1) z(t + \tau_2) dt \quad \text{3 次相関}$$

$$\begin{aligned}
B_{xyz}(\omega_1, \omega_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_{xyz}(\tau_1, \tau_2) e^{i\omega_1 \tau_1} e^{i\omega_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t + \tau_1) z(t + \tau_2) e^{i\omega_1 \tau_1} e^{i\omega_2 \tau_2} dt d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(v_1) z(v_2) e^{i\omega_1 v_1} e^{i\omega_2 v_2} e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} dt dv_1 dv_2 \quad \text{バイスペクトル} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} dt \cdot y(v_1) e^{i\omega_1 v_1} dv_1 \cdot z(v_2) e^{i\omega_2 v_2} dv_2 \\
&= X^*(\omega_1 + \omega_2) Y(\omega_1) Z(\omega_2)
\end{aligned}$$

A.2.3. 離散フーリエ変換

$$F(y)_f = Y(f) = \sum_{k=0}^{N-1} y(k) e^{-i2\pi \frac{f}{N} k} \quad f = 0, \dots, N-1$$

$$y(k) = \frac{1}{N} \sum_{f=0}^{N-1} Y(f) e^{i2\pi \frac{f}{N} k} \quad k = 0, \dots, N-1$$

Fast Fourier Transform で、フーリエ変換を行う場合、周波数ゼロから、 $N/2$ (ナイキスト周波数) までの周波数領域で計算され、計算結果は、各周波数成分の $N/2$ 倍となる。

$$y(k) = \frac{2}{N} \sum_{f=0}^{\frac{N}{2}} Y(f) e^{i2\pi \frac{f}{N} k} \quad k = 0, \dots, N-1$$

たとえば、

$$\begin{aligned}
y(k) &= a_1 \cdot \cos(2\pi \frac{f_1}{N} k) + b_1 \cdot \sin(2\pi \frac{f_1}{N} k) \\
&\quad + a_2 \cdot \cos(2\pi \frac{f_2}{N} k) + b_2 \cdot \sin(2\pi \frac{f_2}{N} k)
\end{aligned}$$

の場合、

$$\begin{aligned}
Y(f_1) &= \frac{N}{2} a_1 - i \frac{N}{2} b_1 \\
Y(f_2) &= \frac{N}{2} a_2 - i \frac{N}{2} b_2
\end{aligned}$$

となる。

同じ信号から、サンプル間隔を変化させて、離散時間データを取り出した場合、同じ周期の成分でも、フーリエ変換により得られる数値は、総サンプル数により変化する。
サンプル間隔が同じで、フーリエ変換するサンプル数を変更したときにも、同様に、同じ周期の成分でも、フーリエ変換により得られる数値は、総サンプル数により変化する。

A2.4. 高次離散キユムラントの離散スペクトル

$$S_{xy}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x^*(k) y(k+n) \quad \text{2 次相関}$$

where $y(k) = y(N+k)$ y is cyclic.

$$\begin{aligned} P_{xy}(f) &= \sum_{n=0}^{N-1} S_{xy}(n) e^{\frac{-i2\pi fn}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x^*(m) y(m+n) e^{\frac{-i2\pi fn}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{h=m}^{N+m-1} \sum_{m=0}^{N-1} x^*(m) y(h) e^{\frac{-i2\pi f(-m)}{N}} e^{\frac{-i2\pi fh}{N}} \\ &= \frac{1}{N} X^*(f) Y(f) \end{aligned} \quad \text{パワースペクトル}$$

$$c_{xyz}(n_1, n_2) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x^*(k) y(k+n_1) z(k+n_2) \quad \text{3 次相関}$$

$$\begin{aligned} B(f_1, f_2) &= \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} c_{xyz}(n_1, n_2) e^{\frac{-i2\pi f_1 n_1}{N}} e^{\frac{-i2\pi f_2 n_2}{N}} \\ &= \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x^*(k) y(k+n_1) z(k+n_2) e^{\frac{-i2\pi f_1 n_1}{N}} e^{\frac{-i2\pi f_2 n_2}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{h_1=k}^{N+k-1} \sum_{n_1=k}^{N+k-1} \sum_{k=0}^{N-1} x^*(k) y(h_1) z(h_2) e^{\frac{-i2\pi f_1 h_1}{N}} e^{\frac{-i2\pi f_2 h_2}{N}} e^{\frac{-i2\pi(-f_1-f_2)k}{N}} \\ &= \frac{1}{N} X^*(f_1 + f_2) Y(f_1) Z(f_2) \end{aligned} \quad \text{バイスペクトル}$$

A.2.5. 畳み込み積分 (convolution)

$$(\mathbf{x} * \mathbf{y})_n = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) y(n-k) \quad n = 0, \dots, N-1$$

where $y(-k) = y(N-k)$ y is cyclic.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{x} * \mathbf{y})_j &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) y(n-k) e^{\frac{-i2\pi jn}{N}} \quad j = 0, \dots, N-1 \\ &= \sum_{l=-k}^{N-k-1} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{\frac{-i2\pi jk}{N}} y(l) e^{\frac{-i2\pi jl}{N}} \\ &= \mathcal{F}(\mathbf{x})_j \mathcal{F}(\mathbf{y})_j \end{aligned}$$